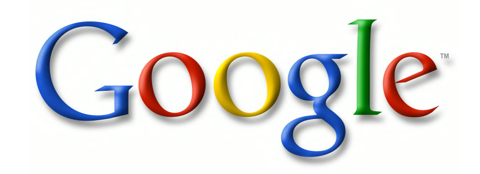
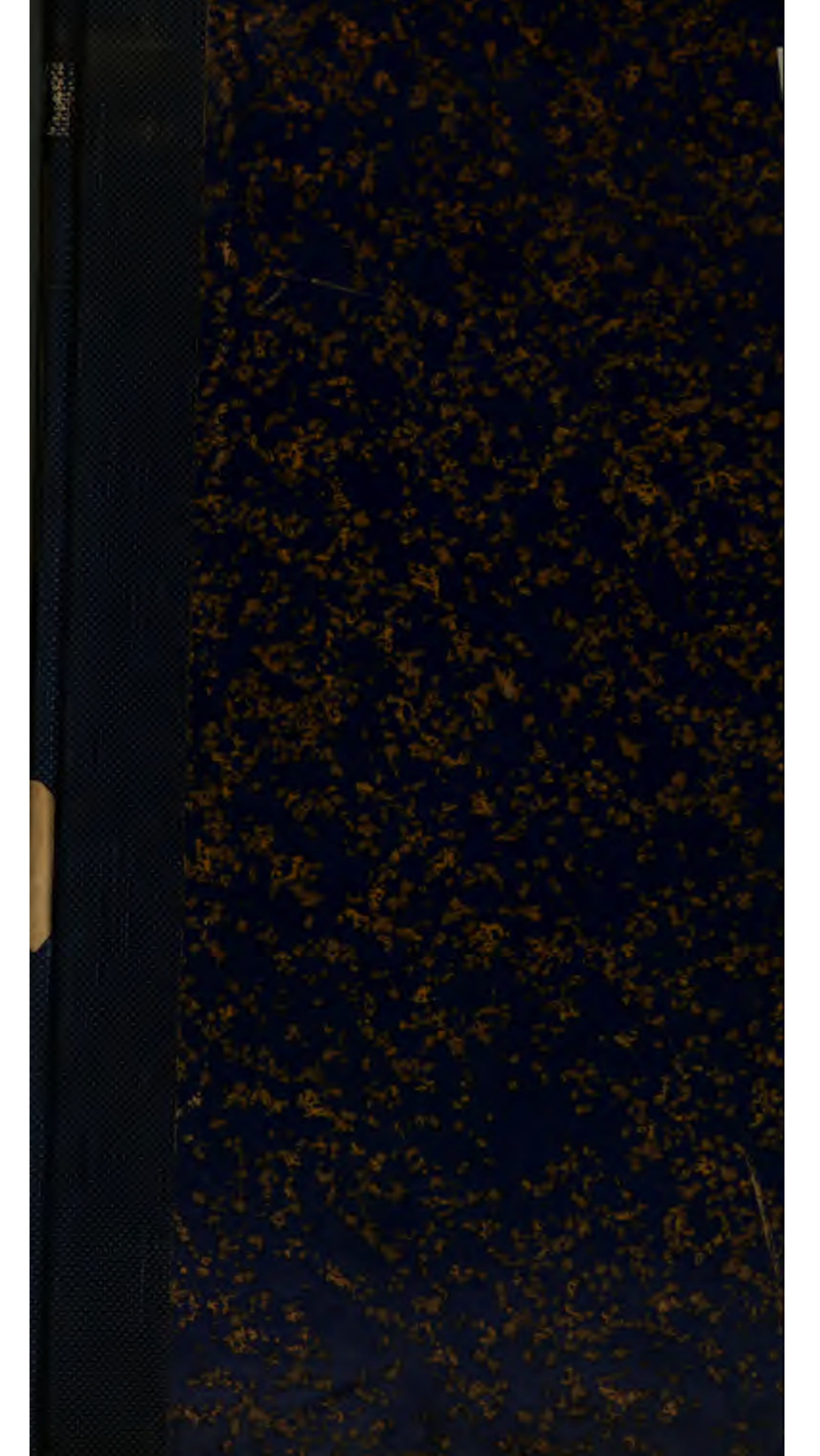
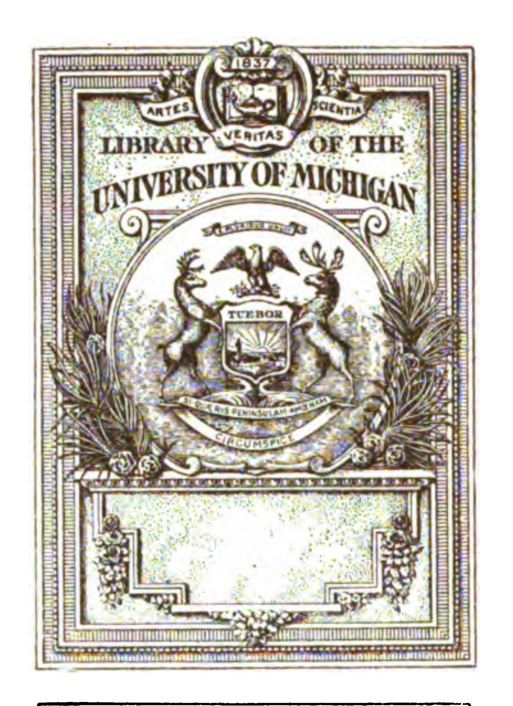
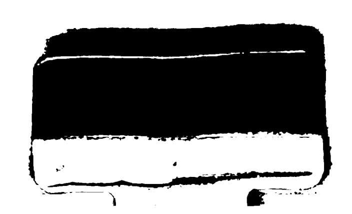





1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE



Alexander Ziwek

Lehrtext

für

Mechanik.

Zum Gebrauche an der mechanisch-technischen Abtheilung höherer Gewerbeschulen.

Erster Theil:

Kräfte im Raume. Elasticitäts- und Festigkeitslehre.

Zweiter Theil:

Geometrische Bewegungslehre. Dynamik fester Körper.

Verfasst von

Karl Moshammer,

Professor an der k. k. Staatsgewerbeschule in Reichenberg.

Reichenberg.

Verlag von J. Fritsche.

1892.

Prof. Alex. Ziwet
gt.
2-5-1923

Druck von Gebrüder Stiepel in Reichenberg.

Inhalt

des ersten und zweiten Theiles.

Erster Theil.

Zweiter Theil.

Geometrische Bewegungslehre.

Dynamik fester Körper.

Vorwort.

Der vorliegende zweite Theil des Lehrtextes umfasst die „geometrische Bewegungslehre“ sowie die „Dynamik fester Körper“ u. zw., wie bei der früheren Lehrtext-Abtheilung, basierend auf den Gesetzen der Elementar-Mathematik.

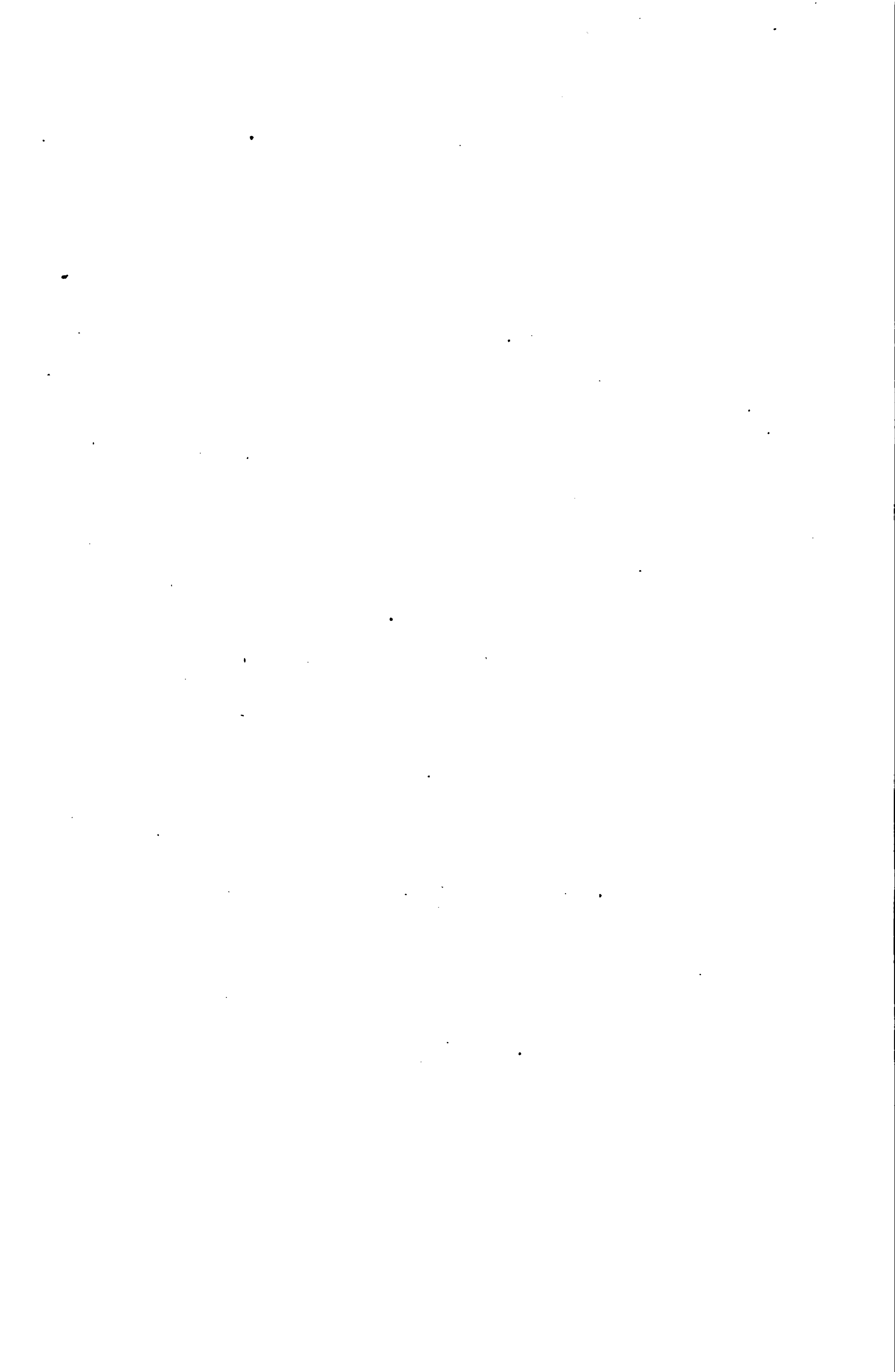
Aus den im Vorworte zum ersten Theile angegebenen Gründen wurde auch in dieses Heft ein Ergänzungs- und Aufgaben-Text aufgenommen, welcher sich durch kleineren Druck und sonstige Anordnung sehr deutlich vom Haupttexte unterscheidet und unter anderem eine große Zahl praktischer Anwendungen (Beispiele &c.) enthält.

Der Verfasser.

Verbesserung zum ersten Theile.

Seite 28 Zeile 9, statt $\left(\frac{x - \Delta}{2}\right)\Delta^2$ soll stehen $\frac{(x - \Delta)^2}{2}\Delta$.

Seite 28 Zeile 10, statt $\left[l(\ldots\ldots) + \frac{1}{2}(\ldots\ldots)\right]$ soll stehen $\left[l(\ldots\ldots) - \frac{1}{2}(\ldots\ldots)\right]$.



Geometrische Bewegungslehre.

Punkt-Bewegung.

Das Folgende enthält die Hauptgesetze der „Bewegungslehre ohne Rücksicht auf die Ursachen der Bewegung".

§ 1. Unter einem materiellen Punkte ist ein so kleiner Körper oder Körpertheil zu verstehen, dass rücksichtlich dessen Bewegung der geometrische Ort seiner unmittelbar auf einander folgenden Lagen, d. i. seine Bahn, als gerade oder krumme Linie betrachtet werden kann u. zw. ist letztere Linie entweder eine ebene Curve, z. B. eine Parabel, oder eine Raumcurve, z. B. eine Schraubenlinie.

Die Länge des während einer gewissen Zeit vom bewegten Punkte durchlaufenen Bahntheiles nennt man den dieser Zeit entsprechenden Weg des Punktes.

Unter der gleichförmigen Bewegung eines Punktes versteht man diejenige bei welcher er in auf einander folgend gleichen und wie immer kleinen Zeittheilen gleiche Wege zurücklegt; bei der ungleichförmigen Bewegung sind diese Wege ungleich.

Als Maßeinheit für Längen dient das Meter, für die Zeiten die Secunde.

Bewegungszustand, Geschwindigkeit, Beschleunigung.

§ 2. Der bewegte Punkt beschreibe irgend eine gerad- oder krummlinige Bahn a b (Taf. I, Fig. 1), wobei er während der Zeit t den Weg von a bis o zurücklege, mit σ werde die Länge des Curven-Elementes bei o bezeichnet. Bekanntlich versteht man unter letzterem die Länge eines so kleinen Curven-Bogens, dass er von der dazu gehörigen Sehne nicht messbar verschieden ist, also die Tangente G bei o als Verlängerung dieses Elementes betrachtet werden kann. Entspricht dem Wege σ die sehr kleine Bewegungszeit τ, so ist der Bewegungszustand an der Stelle o durch die Bewegungsrichtung G und durch die Geschwindigkeit bestimmt, mit welcher sich der Punkt bei o bewegt, wobei unter der

$$\text{Geschwindigkeit das Verhältnis } \frac{\sigma}{\tau} = \frac{\text{Weg-Element}}{\text{Zeittheil}}$$

zu verstehen ist.

Würde allgemeinsten Falles der bewegte Punkt bei fortwährend geändertem Bewegungszustande die Bahn von a bis o zurücklegen, in o oder plötzlich jede Ursache zu einer weiteren Änderung dieses Zustandes aufhören, würde also von nun an so wohl die Bewegungsrichtung G als auch das Verhältnis $\frac{\sigma}{\tau}$ constant bleiben, so müsste der Punkt in der Richtung G in den auf einander folgenden gleichen Zeit-

theilen τ gleiche Weg-Elemente σ zurücklegen, d. h. die Bewegung desselben wäre von nun an eine geradlinig-gleichförmige. Ist nun der Zeittheil τ irgend ein Theil einer Secunde, also $n\tau = 1$ Secunde, so ist durch

$$\frac{\sigma}{\tau} = \frac{n\sigma}{n\tau} = n\sigma = c$$

eine in der Richtung G liegende der Zeiteinheit entsprechende Wegstrecke c gegeben, durch welche im genannten Zeitmomente die Geschwindigkeit bestimmt ist. Es folgt:

„Die Geschwindigkeit bezüglich irgend eines Bewegungs-Zeitmomentes ist durch die Länge c des Weges bestimmt, welchen der bewegte Punkt in der darauf folgenden Secunde geradlinig und gleichförmig zurücklegen würde, falls vom genannten Momente angefangen, der Bewegungszustand ungeändert bliebe." Dieser Zeiteinheits-Weg wird daher auch kurz als Geschwindigkeit in dem diesem Zeitmomente entsprechenden Bahnpunkte o bezeichnet. Durch die Tangente G ist die Richtung dieses Weges also die Geschwindigkeits-Richtung gegeben.

Nach dem oben erörterten Begriffe einer ungleichförmigen Bewegung kann bei derselben rücksichtlich zweier auf einander folgender gleicher und wie früher kleiner Zeittheile τ das Verhältnis $\frac{\sigma}{\tau}$ nicht constant sein, es ist also bei dieser Bewegung in den auf einander folgenden Zeitmomenten und den diesen entsprechenden Bahnpunkten die Geschwindigkeit veränderlich. Die Änderung erfolgt während jedes solchen Zeittheiles τ, sie ist, wie die Geschwindigkeit selbst, durch eine in der Tangenten-Richtung liegende Strecke auszudrücken, letztere werde mit γ bezeichnet.

Unter einer gleichmäßig veränderten Bewegung versteht man diejenige ungleichförmige Bewegung, bei welcher in den auf einander folgenden gleichen Zeittheilen τ gleiche Geschwindigkeits-Änderungen stattfinden; bei derselben ist also das Verhältnis $\frac{\gamma}{\tau}$ constant. Sind diese Geschwindigkeits-Änderungen ungleich, so ergibt sich die ungleichmäßig veränderte Bewegung, bei welcher somit das Verhältnis $\frac{\gamma}{\tau}$ variabel ist.

Dieses Verhältnis $\frac{\gamma}{\tau} = \frac{\text{Geschwindigkeits-Änderung}}{\text{Zeittheil}}$ nennt man entweder Beschleunigung (Acceleration) oder Verzögerung (negative Beschleunigung), je nachdem mit γ entweder eine Zunahme oder eine Abnahme der Geschwindigkeit bezeichnet wurde.

Würde allgemeinsten Falles der bewegte Punkt bei fortwährend geändertem Bewegungszustande die Bahn von a bis o zurücklegen (Fig. 1), in o aber plötzlich die Bewegung mit der bis dahin erlangten Geschwindigkeit in eine gleichmäßig veränderte auf der Tangente G übergehen, so bliebe die an der Stelle o während des Zeittheiles τ stattfindende Geschwindigkeits-Änderung in der Richtung G für alle folgenden Zeittheile von der Größe τ die gleiche, d. h. es wäre das Verhältnis $\frac{\gamma}{\tau}$

constant. Ist nun die Zeit τ irgend ein Theil einer Secunde, also $n\tau = 1$ Secunde, so ist durch

$$\frac{\gamma}{\tau} = \frac{n\gamma}{n\tau} = n\gamma = p$$

eine in der Tangenten-Richtung liegende Strecke p gegeben, durch welche sowohl die Geschwindigkeits-Änderung pro Secunde bei der Bewegung auf der Geraden G wie auch an der Stelle o der krummlinigen Bahn bestimmt ist. Es folgt:

„Die Beschleunigung (Verzögerung) bezüglich irgend eines Bewegungs-Zeitmomentes ist durch die Geschwindigkeits-Änderung p bestimmt, welche dem bewegten Punkte in der darauf folgenden Secunde entsprechen würde, falls die Bewegung plötzlich mit der in diesem Momente statt findenden Geschwindigkeit und Beschleunigung in eine gleichmäßig veränderte auf der betreffenden Bahntangente übergienge." Diese secundliche Geschwindigkeits-Änderung wird daher auch kurz als Beschleunigung (Verzögerung) in dem diesem Zeitmomente entsprechenden Bahnpunkte o bezeichnet und durch eine im Sinne der Bewegung (oder entgegengesetzt) liegende Strecke gemessen.

Bei der geradlinigen Bewegung ist die Bewegungs-Richtung constant und es fällt die Geschwindigkeits-Richtung also auch die Beschleunigungs-Richtung in die Bahn-Gerade.

Im Folgenden werden zunächst die Gesetze der Punkt-Bewegung erörtert und beispielsweise in solchen Fällen auf die Körper-Bewegung angewandt, bei welchen letztere unmittelbar durch die Bewegung eines Punktes bestimmt ist, bei welchen also die rücksichtlich der Punkt-Bewegung eingeführten Benennungen und Bezeichnungen sowie die bereits besprochenen und noch zu begründenden Punkt-Bewegungsgesetze unmittelbar auf die betreffende Körper-Bewegung in Anwendung gebracht werden können.*)

Einfache Bewegung.

a) Gleichförmige Bewegung.

Bei dieser Bewegung ist die Geschwindigkeit $c = \frac{\sigma}{\tau} = \frac{\text{Weg-Element}}{\text{Zeittheil}}$ constant § 3.
und bei der geradlinigen Bewegung unmittelbar gleich dem secundlichen Wege.

Bei der krummlinigen Bewegung entspricht dem sowohl auf der Tangente G (Fig. 1) wie auch auf der Bahn a b liegenden Weg-Elemente σ ein und dieselbe Bewegungszeit τ, also ist der pro Secunde gleichförmig zurückgelegte Weg in der Richtung G gleich jenem auf der Bahn ab, die Geschwindigkeit ist also auch durch den secundlich auf der krummlinigen Bahn zurückgelegten Weg bestimmt.

Nach dem Begriffe einer gleichförmigen Bewegung ist für die Zeit von
1, 2, 3, ... t Secunden der Weg gleich
c, 2c, 3c, ... tc, also ist der Weg $s = ct$.

*) In § 17 werden die Gesetze erörtert, mittelst welcher jede Bewegung eines Körpers durch die Bewegung eines seiner Punkte bestimmt werden kann.

Trägt man die Bewegungszeiten als Abscissen und die entsprechenden Geschwindigkeiten als Ordinaten auf (Fig. 2), so ist durch $c = \frac{s}{t} = \text{const.}$ eine Gerade $L \parallel oX$ bestimmt. (Geschwindigkeitslinie, $y = c$.)

Die Wegzahl $s = ct$ stimmt überein mit der Flächen-Maßzahl eines Rechteckes von der Grundlinie t und Höhe c.

Sind bezüglich zweier gleichförmiger Bewegungen die Bewegungszeiten verschieden, so ist bei gleichen Geschwindigkeiten das Weg-Verhältnis

$$\frac{s}{s_1} = \frac{ct}{ct_1} = \frac{t}{t_1},$$

sind die Geschwindigkeiten verschieden, so ist bei gleichen Bewegungszeiten

$$\frac{s}{s_1} = \frac{ct}{c_1 t} = \frac{c}{c_1}.$$

Beispiel.

Zwei Dampfwägen bewegen sich auf gerader Schienenbahn bei ursprünglich großem gegenseitigen Abstande l gleichzeitig gegen einander mit den Geschwindigkeiten c und c_1. Es sind deren Wege s, s_1 und ist die Zeit t bis zu ihrem Zusammentreffen zu bestimmen.

$$\text{Aus } \frac{s}{s_1} = \frac{s}{l - s} = \frac{c}{c_1} \text{ folgt } s = \frac{lc}{c + c_1}, \quad s_1 = l - s,$$

$$\text{ferner ist } t = \frac{s}{c} = \frac{l}{c + c_1}.$$

Wie groß sind s, s_1 und t, falls diese Wägen beziehungsweise minutlich 0·6 *km* und 0·4 *km* gleichförmig zurücklegen und der Abstand l 1·2 *km* beträgt? $\left(c = \frac{600}{60} = 10\ m,\ c_1 = \frac{400}{60} = 6{\cdot}66\ m\right)$.

Gleichförmige Bewegung im Kreise. Bewegt sich ein Punkt a gleichförmig im Kreise vom Radius r (Fig. 3) mit n Touren pro Minute, so ist der minutliche Weg desselben gleich $2r\pi n$, also ist dessen

$$\text{Geschwindigkeit (Umfangsgeschwindigkeit) } c = \frac{2r\pi n}{60}.$$

$$\text{Die Zeit zu einer Tour ist } t = \frac{2r\pi}{c} = \frac{60}{n}.$$

Beispiele.

1) Wenn bei einem Zahnrade der Theilkreis-Durchmesser gleich 1 *m* ist und ein Punkt dieses Kreises 4 *m* Geschwindigkeit besitzt (kurz: 4 *m* Rad-Geschwindigkeit), wie viele Touren macht dasselbe pro Minute?

$$n = \frac{60\,c}{2r\pi} = \frac{60 \,.\, 4}{3{\cdot}14} = 76{\cdot}4.$$

2.) Wie groß ist die Geschwindigkeit eines Punktes am Umfange einer Riemenscheibe (zugleich Riemen-Geschwindigkeit) von 1·5 *m* Durchmesser, falls deren Welle minutlich 80 Touren macht, und wie groß ist die Zeit zu einer Tour?

$$c = \frac{d\pi n}{60} = \frac{1{\cdot}5 \,.\, 3{\cdot}14 \,.\, 80}{60} = 6{\cdot}28\ m.$$

$$t = \frac{60}{n} = 0{\cdot}75\ \text{sec.}$$

b) Gleichmäßig veränderte Bewegung.

Bei dieser Bewegung ist die Beschleunigung (Verzögerung) § 4.

$$p = \frac{\gamma}{\tau} = \frac{\text{Geschwindigkeits-Änderung}}{\text{Zeittheil}} \text{ constant}$$

und bei der geradlinigen Bewegung unmittelbar durch die secundliche Geschwindigkeits-Änderung bestimmt.

Bei der krummlinigen Bewegung entspricht dem sowohl auf der Tangente G (Fig. 1) wie auch auf der Bahn a b liegenden Weg-Elemente σ dieselbe Bewegungszeit τ und dieselbe Geschwindigkeits-Änderung γ, also ist die in den folgenden gleichen Zeittheilen und mithin auch in den folgenden Secunden erlangte Geschwindigkeits-Änderung bei der gleichmäßig veränderten Bewegung auf der Geraden G gleich jener bei derselben Bewegung auf der Bahn a b, die $\pm$ Beschleunigung ist also in diesem Falle auch durch die secundlich auf der Bahn a b erlangte Geschwindigkeits-Änderung bestimmt.

Gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit der Anfangs-Geschwindigkeit gleich Null, d. h. die Bewegung beginnt von der Ruhe aus.

Für die Zeiten gleich 1, 2, 3, ... t Secunden sind
die Geschwindigkeits-Zunahmen gleich p, 2 p, 3 p, ... tp
also ist die am Ende der Zeit t erlangte Geschwindigkeit d. i. die

$$\text{Endgeschwindigkeit } v = pt \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1$$

Trägt man wieder die Zeiten als Abscissen und die entsprechenden Geschwindigkeiten als Ordinaten auf (Fig. 4) so ist durch

$$p = \frac{v}{t} = \operatorname{tang} \alpha = \text{const.}$$

eine durch den Coordinaten-Ursprung o gehende Gerade L bestimmt, welche mit der Axe oX den Winkel α bildet, (Geschwindigkeitslinie, $y = px$).

Nach dem erörterten Grundbegriffe ist bezüglich irgend eines kleinen Zeittheiles τ (Fig. 4) die entsprechende Geschwindigkeit

$$c' = \frac{\text{Weg-Element } \sigma}{\text{Zeittheil } \tau}, \text{ also ist } \sigma = c'\tau.$$

Da aber das durch c' und τ bestimmte Rechteck (Fig. 4) flächengleich mit dem schraffierten Trapeze ist, so gibt die Flächen-Maßzahl des letzteren die Größe des Weg-Elementes. Denkt man bezüglich jedes der auf einander folgenden Zeittheile ein solches Trapez construiert, so ist durch die Summe dieser Trapeze ein Dreieck oab bestimmt, dessen Flächen-Maßzahl somit der Maßzahl des ganzen während der Zeit t zurück gelegten Weges s entspricht. Es folgt:

$$s = \frac{vt}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2$$

oder aus 1), für $t = \dfrac{v}{p}$ . . . . $s = \dfrac{v^2}{2p}$ . . . . (3

oder aus 1), für $v = pt$ . . . . $s = \dfrac{pt^2}{2}$ . . . . (4

Gleichmäßig verzögerte Bewegung bis zur Endgeschwindigkeit gleich Null, also beginnend mit einer Anfangsgeschwindigkeit v.

Bezüglich der nun entsprechenden grafischen Darstellung (Fig. 5) ergeben sich durch Abtragen der secundlichen constanten Geschwindigkeits-Abnahme p die zu den Einheiten der Zeit t gehörenden Geschwindigkeiten und man erhält das Dreieck a b o in entgegengesetzter Lage von der früheren, woraus unmittelbar zu ersehen, dass die oben unter (1 bis (4 angeführten Gesetze auch in diesem Falle gelten.

Entsprechen bei diesen gleichmäßig veränderten Bewegungen den Wegen s, s_1 beziehungsweise die Geschwindigkeiten v, v_1 und die Zeiten t, t_1, so folgt aus den Gleichungen 3) und 4)

$$\frac{s}{s_1} = \frac{v^2}{v_1^2} = \frac{t^2}{t_1^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5$$

Freier Fall. Bekanntlich beträgt in Mittel-Europa die als constant anzunehmende Beschleunigung eines frei fallenden Körpers 9·81 *m**), sie wird mit g bezeichnet. Es kommen also bei dieser Bewegung die in (1 bis (5 angeführten Gesetze für $p = g = 9{\cdot}81$ in Verwendung.

Beispiele.

1.) Wie groß ist der von einem frei in einen Brunnen fallenden Steine zurückgelegte Weg s (annähernd), falls die Zeit, zwischen dem Beginne dieser Bewegung und der Wahrnehmung des durch das Aufschlagen des Steines entstehenden Schalles, T sec. beträgt.

Bezeichnet man die Fallzeit mit t, die Schall-Bewegungszeit und die constante Schall-Geschwindigkeit beziehungsweise mit t_1 und c, so folgt

aus $s = \frac{g t^2}{2}$, $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$,

aus $s = c t_1$, $t_1 = \frac{s}{c}$. Es ist ferner

$t + t_1 = T = \sqrt{\frac{2s}{g}} + \frac{s}{c}$, woraus bestimmt wird

$s^2 - 2sc\left(T + \frac{c}{g}\right) = -c^2 T^2$ und $s = \frac{c}{g}\left(gT + c - \sqrt{2cgT + c^2}\right)$.

Wie groß ist die Fallhöhe s für T = 8 sec. und c = 332 *m*.

2.) Wenn bei einem nur mit Unterdampf arbeitenden Dampfhammer durch einige Zeit die Hubzeit des Klotzes ungefähr das Doppelte seiner Fallzeit beträgt, wie viele Schläge macht er minutlich bei bekanntem Hube s.

Aus $s = \frac{g t^2}{2}$ ist die Fallzeit $t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$,

die Zeit zu einem Schlage ist $T = 3t = 3\sqrt{\frac{2s}{g}}$,

die Zahl der Schläge pro Minute ist $n = \frac{60}{T} = 20\sqrt{\frac{g}{2s}}$.

§ 5. Gleichmäßig beschleunigte Bewegung mit der Anfangs-Geschwindigkeit c. Bei diesem Bewegungsfalle nimmt die Geschwindigkeit, von der Größe c angefangen, secundlich um die constante Größe p zu, also ist tp die Größe der Geschwindigkeits-Zunahme während t sec. und mithin ist die

Endgeschwindigkeit $v = c + pt$ .... (1

Die hier entsprechende grafische Darstellung (Fig. 6) ergibt sich aus Fig. 4, durch Vergrößerung der Ordinaten um die Strecke c.

*) Genau genommen nur für den freien Fall im luftleeren Raume.

Durch $p = \frac{v-c}{t} = \text{tang}\,.\,\alpha = \text{const.}$ ist wieder eine Gerade L bestimmt mit der Neigung α gegen die Axe $o'X$, (Geschwindigkeitslinie $y = px + c$).

Aus denselben Gründen, wie bei dem vorhergehenden Falle, ist auch hier durch die Maßzahl $c_1\,\tau$ der Fläche des kleinen (in Fig. 6) schraffierten Trapezes das Weg-Element σ pro Zeittheil τ und mithin ist durch jene der Fläche des großen Trapezes $o\,o'a\,b$ der Weg s pro Zeit t bestimmt. Es folgt.

$$\text{Weg } s = \left(\frac{c+v}{2}\right)t \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2$$

Gleichmäßig verzögerte Bewegung bis zur Endgeschwindigkeit c mit der Anfangsgeschwindigkeit v. Bezüglich der nun entsprechenden grafischen Darstellung (Fig. 7) ergibt sich durch Vergrößerung der Ordinaten der Fig. 5 um die Strecke c das Trapez $b\,a\,o'\,o$ in entgegengesetzter Lage von jener des früheren Trapezes, woraus unmittelbar zu ersehen, dass die Formeln 1) 2) für v und s auch rücksichtlich dieses Bewegungsfalles gelten.

Sind von den fünf in diesen beiden Formeln vorkommenden Größen p, v, c, t, s drei gegeben, so können die zwei fehlenden in bekannter Weise bestimmt werden. Ist z. B. gegeben p, v, c, so folgt

aus 1) . . . . $t = \frac{v-c}{p}$

und damit aus 2) . . . . $s = \frac{v^2 - c^2}{2p}$

Beispiel.

1.) In welcher Zeit würde ein Dampfwagen, unter der Voraussetzung, dass infolge des Bremsens eine gleichmäßig verzögerte Bewegung entsteht, während eines Weges $s = 300\,m$ von der Geschwindigkeit $v = 10\,m$ auf jene $c = 6\,m$ kommen und wie groß wäre dessen (secundliche) Verzögerung.

Aus Form. 2) ist . . . . . $t = \frac{2s}{c+v} = \frac{2\,.\,300}{6+10} = 37{\cdot}5$ sec.

„ „ 1) „ . . . . . $p = \frac{v-c}{t} = \frac{10-6}{37{\cdot}5} = 0{\cdot}107\,m$.

2.) Welche Endgeschwindigkeit erlangt ein vertical abwärts geworfener Körper (oder das aus einer Öffnung vertical abwärts strahlende Wasser-Element) ohne Rücksicht auf den Luftwiderstand, falls dessen Anfangsgeschwindigkeit c und Fallhöhe h gegeben sind.

Aus Form. 1) und 2) folgt: $v = c + gt = c + \frac{2gh}{c+v}$

woraus man findet: $v^2 = c^2 + 2gh$.

Gleichmäßig veränderte Bewegung im Kreise. Rotiert ein Punkt vor dem Eintritte der constanten Geschwindigkeits-Änderung gleichförmig mit minutlich n Touren und nach dem Aufhören derselben gleichförmig mit minutlich n′ Touren im Kreise vom Radius r, so sind die betreffenden secundlichen Wege, also, bezüglich der gleichmäßig veränderten Bewegung,

die Anfangsgeschwindigkeit $c = \frac{2r\pi n}{60}$, die Endgeschwindigkeit $v = \frac{2r\pi n'}{60}$.

Bezeichnet ferner rücksichtlich dieser Bewegung p die $\pm$ Beschleunigung (Umfangs-Beschleunigung), t die Bewegungszeit und s den Weg des Punktes, so ist,

wie früher

$$v = c \pm p\,t, \quad s = \left(\frac{v + c}{2}\right) t.$$

Die Zahl der Touren während dieser ungleichförmigen Bewegung ist bestimmt durch

$$x = \frac{\text{Weg}}{\text{Umfang}} = \frac{s}{2\,r\,\pi}.$$

Beginnt die gleichmäßig beschleunigte Bewegung von der Ruhe aus, so ist $c = 0$.
Dauert die gleichmäßig verzögerte Bewegung bis zur Ruhe, so ist $v = 0$.

Beispiele.

1.) Ein Schwungring komme bei gleichmäßig beschleunigter Bewegung von $c = 12\ m$ auf $v = 16\ m$ Umfangs-Geschwindigkeit im Kreise vom (mittleren) Ring-Durchmesser $d = 3\ m$. Wie groß ist seine Tourenzahl x während dieser 10 sec. dauernden Bewegung?

$$x = \frac{s}{d\,\pi} = \frac{v + c}{2\,d\,\pi}\,t = \frac{16 + 12}{2\,.\,3\,.\,3{\cdot}14}\,.\,10 = 14{\cdot}8.$$

2.) Eine Scheibe macht nach dem Aufhören ihres Bewegungs-Antriebes noch 8 Touren während einer Zeit von 12 sec. mit nahezu gleichmäßig verzögerter Bewegung, wie viele Touren (n) machte sie unmittelbar vor dieser Zeit?

Hier ist die Endgeschwindigkeit $v = 0$, also

$$s = \frac{c\,t}{2} = \frac{2\,r\,\pi\,n\,t}{2.60}, \text{ mithin } \frac{s}{2\,r\,\pi} = \frac{n\,t}{120} = 8$$

woraus gefunden wird $n = \frac{120\,.\,8}{t} = 80.$

c) Ungleichmäßig veränderte Bewegung, mittlere Geschwindigkeit.

§ 6. Da bei dieser Bewegung in den auf einander folgenden gleichen und kleinen Zeittheilen τ ungleiche Geschwindigkeits-Änderungen γ stattfinden, also die

$$\text{Beschleunigung (Verzögerung) } p = \frac{\text{Geschwindigkeits-Änderung}}{\text{Zeittheil}} = \frac{\gamma}{\tau}$$

nicht constant ist, so muss sich in der diesbezüglichen graphischen Darstellung (Fig. 8), falls wieder die Zeiten als Abscissen und die entsprechenden Geschwindigkeiten als Ordinaten aufgetragen werden, eine Curve a m m′ d als Geschwindigkeitslinie ergeben, u. z. entspricht Fig. 8 dem allgemeinen Falle, bei welchem die Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit c beginnt und nach der Zeit t eine Endgeschwindigkeit v erreicht ist.

Irgend einem Bewegungs-Zeitmomente entspricht die Geschwindigkeit c′ mit dem Curvenpunkte m. Da die in m gezogene Tangente L bekanntlich als Verlängerung des Curven-Elementes bei m betrachtet werden kann und zu diesem Elemente die kleine Bewegungszeit τ gehört, so ist die Gerade L die Geschwindigkeitslinie einer gleichmäßig veränderten Bewegung, mit welcher die vorliegende Bewegung während des Zeittheiles τ gleiche Geschwindigkeits-Änderung γ besitzt, es ist daher rücksichtlich des der Geschwindigkeit c′ zugehörigen Zeitmomentes die

$$\text{Beschleunigung (Verzögerung) } p = \frac{\gamma}{\tau} = \pm \text{ tang}\,.\,\alpha,$$

falls mit α die Neigung der Tangente L gegen die Axe o X bezeichnet wird.

Für $\alpha = 0$ kommt die Tangente in die Lage L′ mit dem Berührungspunkte m′, entsprechend dem Zeitmomente, in welchem die beschleunigte Bewegung in die verzögerte übergeht.

Wie bereits (in § 4) erörtert, ist durch die Maßzahl der kleinen in Fig. 8 schraffierten Trapezfläche der während des Zeittheiles τ zurückgelegte Weg und daher auch durch die Summe dieser Trapezflächen d. h. durch die Maßzahl der Fläche oamdb der Weg s, welcher der Zeit t entspricht, bestimmt. (Diese Fläche berechnet man allgemeinsten Falles nach Simpson's Formel.)

Zieht man (Fig. 9) durch den Anfangspunkt einer zur Axe oX parallelen Strecke von 1 *m* Länge (verjüngt) Parallele zu den Tangenten L, L' 2c., so ergeben sich auf der durch den Endpunkt dieser Strecke senkrecht zu letzterer gezogenen Geraden unmittelbar die den Curvenpunkten m, m' 2c. und den dazu gehörigen Zeitmomenten entprechenden Beschleunigungen p, p' 2c. denn es ist $p = \tan g\,\alpha$.

Unter der mittleren Geschwindigkeit versteht man die Geschwindigkeit jener substituierten gleichförmigen Bewegung, bei welcher von dem bewegten Punkte in der Zeit t der Weg s, beides übereinstimmend mit der gegebenen ungleichförmigen Bewegung, zurückgelegt würde. Es ist also rücksichtlich der durch Fig. 8 dargestellten Bewegung die mittlere Geschwindigkeit durch die Höhe eines Rechteckes von der Grundlinie t bestimmt, welches gleich der Fläche oamdb ist.

Anwendung. (Fig. 10.)

Die Geschwindigkeit des Kolbens einer Dampfmaschine ist am Anfange und am Ende des Kolbenhubes s gleich Null und ungefähr in der Mitte des letzteren am größten, diese Bewegung ist also eine ungleichförmige. Macht nun die Maschine minutlich n Kolbenspiele oder 2n einfache Kolbenhübe, so ist der mittlere Kolbenweg pro Secunde, d. i. die mittlere Kolbengeschwindigkeit $c = \frac{2ns}{60}$.

Zusammengesetzte Bewegung.

§ 7. Diese erscheint als das Ergebnis der Zusammensetzung zweier oder mehrerer der bisher besprochenen einfachen Bewegungen.

a) Zwei Bewegungen in derselben oder in entgegengesetzter Richtung.

Bewegt sich ein Punkt von o (Fig. 11) aus auf der Geraden oX während des Weges x und denkt man, dass gleichzeitig dieser Halbstrahl oX in der Richtung o gegen X (oder entgegengesetzt) um die Strecke y verschoben wird, so besitzt der bewegte Punkt eine zweifach zusammengesetzte Bewegung und die neue Lage o' desselben ist bestimmt durch die Strecke $oo' = x \pm y$.

Man findet also auch die neue Lage o' des bewegten Punktes indem man denselben zuerst die Strecke x und dann in entsprechender Richtung die Strecke y zurücklegen läßt, d. h. man denkt sich beide Bewegungen als auf einander folgend, u. zw. jede entsprechend einer Zeit t gleich jener der zusammengesetzten Bewegung.

Sind die beiden einfachen Bewegungen gleichförmige mit den Geschwindigteiten c und v, wie dieses z. B. bei der zusammengesetzten Bewegung eines Flussdampfers der Fall sein kann, so ist der resultierende Weg

$$s = x \pm y = ct \pm vt = (c \pm v)t,$$

die zusammengesetzte Bewegung ist also ebenfalls eine gleichförmige mit der Geschwindigkeit $c \pm v$ als Resultante von c und v.

Sind beide Bewegungen gleichmäßig veränderte mit den Beschleunigungen p und q, so ist der resultierende Weg

$$s = x \pm y = \frac{1}{2} pt^2 \pm \frac{1}{2} qt^2 = \left(\frac{p \pm q}{2}\right) t^2,$$

die zusammengesetzte Bewegung ist also wieder eine gleichmäßig veränderte Bewegung mit der Acceleration $p \pm q$ als Resultante von p und q.

Ist die eine Bewegung eine gleichförmige mit der Geschwindigkeit c und die zweite eine gleichmäßig veränderte, mit der Beschleunigung p, so ist der resultierende Weg

$$s = x \pm y = ct \pm \frac{pt^2}{2} = (2c \pm tp) \frac{t}{2}.$$

Wird die Resultante der beiden Geschwindigkeiten c und $\pm tp$ mit v bezeichnet, so ist $v = c \pm tp$ und

$$s = \left(\frac{c + v}{2}\right) t.$$

Die zusammengesetzte Bewegung ist also (nach § 5) eine gleichmäßig veränderte mit der Anfangsgeschwindigkeit c und Endgeschwindigkeit v.

Anwendung. Wird ein Körper mit der Anfangs-Geschwindigkeit c vertical aufwärts geworfen (oder strahlt ein Wasser-Element aus einer Öffnung mit dieser Geschwindigkeit vertical aufwärts), so ist dessen Endgeschwindigkeit $v = c - tg = 0$, also ist $c = gt$ und mithin ist die Steighöhe $s = \frac{gt^2}{2}$.

Beispiel.

Ein vertical aufwärts geworfener Körper kam nach 3 sec. wieder zu seinem Ausgangspunkte zurück, wie groß war seine Steighöhe und seine Anfangs-Geschwindigkeit?

Hier ist $t = 1{\cdot}5$ sec. also

$$s = \frac{gt^2}{2} = \frac{9{\cdot}81 \,.\, 1{\cdot}5^2}{2} = 11{\cdot}04\ m. \qquad c = gt = 14{\cdot}7\ m.$$

b) Zwei oder mehrere Bewegungen in verschiedenen Richtungen.

§ 8. Bewegt sich ein Punkt von o aus (Fig. 12) auf der Geraden oX, wobei er in der Zeit t den Weg x zurücklegt, und denkt man, dass gleichzeitig dieser Halbstrahl oX in der Richtung oY um die Strecke y verschoben wird, so besitzt dieser Punkt gleichzeitig zwei Bewegungen und befindet sich nach der Zeit t im Eckpunkte o′ des den Strecken x und y entsprechenden Parallelogramms (Bewegungs-Parallelogramm); seine Bahn ist irgend eine ebene gerade oder krumme Linie. Wie zu ersehen, wird der Punkt o′ auch dadurch erhalten, dass man sich, wie im früheren Falle, die beiden einfachen Bewegungen als auf einander folgend denkt mit den bezüglichen Wegen x, y und jede entsprechend einer Zeit t gleich jener der zusammengesetzten Bewegung.

Denkt man, dass gleichzeitig mit den zwei früheren Bewegungen die ganze durch oX und oY bestimmte Ebene in einer beliebigen Richtung um die Strecke z in sich oder parallel zu sich verschoben wird, so besitzt der Punkt o eine dreifach zusammengesetzte Bewegung und man findet, dass seine Lage o′ nach der

Zeit t dadurch zu bestimmen ist, dass man die drei in einer Ebene oder nicht in einer Ebene stattfindenden Bewegungen in beliebiger Ordnung auf einander folgen lässt u. z. jede entsprechend der Zeit t u. s. w.

Zwei gleichförmige Bewegungen in den Richtungen oX und oY (Fig. 13).

Sind bezüglich dieser beiden Richtungen c und v die Geschwindigkeiten und x, y die Wege des von o aus bewegten Punktes, so ergibt sich bei gleichzeitigem Stattfinden beider Bewegungen in o′ die neue Lage des Punktes nach der Zeit t, dabei ist $x = ct$, $y = vt$.

Für irgend eine andere Bewegungszeit t_1 sind die Wege $x_1 = ct_1$, $y_1 = vt_1$, und ist daher in dem Eckpunkte o″ des zweiten Parallelogramms die neue Lage des bewegten Punktes, dessen Bahn die Linie oo′o″...... bildet.

Aus $\frac{x}{x_1} = \frac{t}{t_1} = \frac{y}{y_1}$ folgt, dass diese Bahn eine Gerade und

aus $\frac{oo'}{oo''} = \frac{x}{x_1} = \frac{t}{t_1}$, dass die resultierende Bewegung eine gleichförmige ist (§ 3).

Für $t = 1$ sec. wird $x = c$, $y = v$ und man erhält (Fig. 14) den resultierenden Weg pro Secunde, d. i. die resultierende Geschwindigkeit w, als Diagonale des durch die Geschwindigkeiten c und v bestimmten Parallelogramms (Geschwindigkeits-Parallelogramm). Wird in derselben Weise diese Geschwindigkeit w mit einer dritten nicht in der Ebene c, v liegenden Geschwindigkeit u zusammengesetzt, so ist die Resultante von w und u auch zugleich die resultierende Geschwindigkeit von c, v und u; dieselbe ist gleich der Raum-Diagonale des durch diese drei Geschwindigkeiten bestimmten Geschwindigkeits-Parallelopipeds.

Umgekehrt erfolgt mittelst des Geschwindigkeits-Parallelogramms oder des Geschwindigkeits-Parallelopipeds die Zerlegung einer Geschwindigkeit in zwei in derselben Ebene oder in drei nicht in derselben Ebene liegende Componenten.

Ist der Geschwindigkeits-Winkel $(c, v) = \alpha = \delta + \varphi$ (Fig. 14), so enthält das Dreieck obo′ die Winkel $180 - \alpha$, δ, φ und die Seiten w, v, c. Sind daher von diesen sechs Größen drei bekannt, worunter eine Seite, so können die übrigen nach den bekannten Gesetzen über die Dreieck-Auflösung bestimmt werden. Sind besonderen Falles die beiden Geschwindigkeits-Componenten c und v gleich groß, so entsteht ein Rhombus, dessen Diagonalen bekanntlich auf einander senkrecht stehen und bei welchem jedes der vier congruenten rechtwinkligen Dreiecke die Bestimmungsstücke $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{w}{2}$, c besitzt. Desgleichen kommen auch die Gesetze der Auflösung eines rechtwinkligen Dreieckes bei dem einfachen Falle $\sphericalangle(c, v) = 90^\circ$ in Verwendung.

Beispiele.

1.) Welche Größen besitzen die Componenten c und v der Geschwindigkeit w (Fig. 14), falls sie mit ihrer Resultante beziehungsweise die Winkel $\delta = 23^\circ\, 1'$ und $\varphi = 17^\circ\, 3'$ bilden sollen und $w = 15{\cdot}52\ m$ beträgt.

Da $\sin[180 - (\varphi + \delta)] = \sin(\varphi + \delta)$ ist, so folgt

$$c = w \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi + \delta)} = 7{\cdot}07\ m. \qquad v = w \frac{\sin\delta}{\sin(\varphi + \delta)} = 9{\cdot}43\ m.$$

2.) Besitzt ein Wasserrad die Geschwindigkeit v im äußeren Umfange und soll an der Stelle a des letzteren (Fig. 15) das Wasser mit der Geschwindigkeit c längst der Schaufel ab in das Rad fließen, so besitzt ein Wassertheilchen an dieser Stelle zwei Bewegungen und mithin

muß die Geschwindigkeit w des bei a ankommenden Wassers der Resultante von c und v gleich sein. Wie bestimmt man in diesem Falle für v = 1·3 *m*, w = 3 *m* und $\sphericalangle$(v, c) = 28° durch Construction und Rechnung die Geschwindigkeit c und den $\sphericalangle$(v, w)?

Zwei gleichmäßig beschleunigte Bewegungen in den Richtungen oX und oY (Fig. 16).

Bewegt sich der Punkt von o aus mit den diesen Richtungen entsprechenden Beschleunigungen p und q, so wird wie früher die neue Lage (in o′) des Punktes mittelst der auf einander folgend gedachten Wege x und y pro Zeit t bestimmt; dabei ist $x = \frac{pt^2}{2}$, $y = \frac{qt^2}{2}$.

Für eine andere Bewegungszeit t_1 ist in o″ die neue Lage des Punktes und sind die Wege $x_1 = \frac{pt_1^2}{2}$, $y_1 = \frac{qt_1^2}{2}$.

Aus $\frac{x}{x_1} = \frac{t^2}{t_1^2} = \frac{y}{y_1}$ folgt, dass die Bahn oo′o″.... eine Gerade und aus $\frac{oo'}{oo''} = \frac{x}{x_1} = \frac{t^2}{t_1^2}$, dass die resultierende Bewegung eine gleichmäßig beschleunigte ist (§ 4).

Für $t = \sqrt{2}$ sec. wird x = p, y = q und man erhält (Fig. 17) den resultierenden Weg oo′ als resultierende Acceleration r in der Diagonale des durch die Beschleunigungen p und q bestimmten Parallelogramms (Beschleunigungs-Parallelogramm).

Es erfolgt also auch die Zusammensetzung und Zerlegung zweier (oder mehrerer) bezüglich eines Punktes gleichzeitig stattfindender Accelerationen nach denselben Rechnungs- und graphischen Methoden, wie jene der Geschwindigkeiten. Das oben über das Geschwindigkeits-Dreieck Erörterte (Fig. 14) gilt auch hier bezüglich der drei Beschleunigungen p, q, r.

Eine gleichförmige und eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung.

§ 9. 1. Fall. **Der Winkel der beiden Bewegungs-Richtungen $\sphericalangle$ XoY sei gleich 90°** (Fig. 18).

Bewegt sich der Punkt von o aus mit der Geschwindigkeit c und der Beschleunigung p und denkt man sich wieder zuerst die Bewegungen als zwei auf einander folgende, so ergeben sich bezüglich der Bewegungszeit t die Wege

$$1)\ x = ct, \qquad 2)\ y = \frac{pt^2}{2},$$

und es befindet sich der bewegte Punkt bei gleichzeitigem Stattfinden beider Bewegungen in o′.

Die Gleichungen 1) 2) gelten für jede Zeit, mithin muss sich durch Elimination von t eine Relation bezüglich aller Lagen des bewegten Punktes, d. h. es muß sich die **Gleichung der Bahn** oo′ ergeben.

Aus Gleichung 1) ist $t = \frac{x}{c}$, womit aus 2) folgt, $x^2 = \left(\frac{2c^2}{p}\right) y \quad . \; . \; . \; (3$

also eine **Parabel vom Parameter** $\frac{2c^2}{p}$.

Die Geschwindigkeit w in dem Punkte o′ ist die Resultante aus der während der ganzen Bewegung in der X-Richtung constanten Geschwindigkeit c und aus der dem Wege y und der Beschleunigung p entsprechenden Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gy}$ in der Y-Richtung. Es folgt bezüglich der Größe und Richtung dieser Geschwindigkeit des bewegten Punktes, falls die Neigung derselben gegen die X-Richtung mit φ bezeichnet wird,

$$w = \sqrt{c^2 + 2py}, \quad \cos\varphi = \frac{c}{w} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4$$

Wird die während der ganzen Bewegung constante Beschleunigung p im Punkte o′ in zwei Componenten zerlegt, die eine in der Bewegungs-Richtung und die zweite senkrecht zu dieser, so ergibt sich die Tangential-Beschleunigung $p \sin\varphi$ und die Normal-Acceleration $p \cos\varphi$.

Die Tangential-Beschleunigung ist rücksichtlich der verschiedenen Bahnpunkte variabel, nämlich abhängig vom $\sphericalangle\, \varphi$, es ist daher diese parabolische Bewegung eine ungleichmäßig veränderte.

Anwendung. Ohne Rücksicht auf den Luftwiderstand erhält ein in horizontaler Richtung mit der Geschwindigkeit c geworfener Körper unter dem Einfluße der Freifall-Acceleration g diese parabolische Bewegung (horizontaler Wurf), und denselben Gesetzen unterliegt auch das Wasser-Element, welches in horizontaler Richtung aus einer Öffnung strahlt.

Beispiele.

1. Welche Anfangs-Geschwindigkeit c und welche Bewegungszeit t ist nöthig, um mittelst horizontalen Wurfes einen durch die Abstände $x = a$, $y = b$ gegebenen Punkt zu treffen? (Fig. 18).

Aus Gleichung 3) folgt $\ldots\ldots$ $c = a\sqrt{\frac{g}{2b}}$

und aus Gleichung 1) $\ldots\ldots\ldots$ $t = \frac{a}{c}$.

2.) Das aus einer Öffnung o (z. B. Schützenöffnung) horizontal ausfließende Wasser soll mit einer gegebenen Geschwindigkeit w in durch den $\sphericalangle\varphi$ gegebener Richtung in einen gleichfalls gegebenen Raum (z. B. in eine Radzelle) eintreten. Die Lage des Parabelscheitels o ist mittelst Bestimmung der Abstände x, y zu ermitteln. (Fig. 18.)

Die der Fallhöhe y entsprechende Geschwindigkeit ist $\sqrt{2gy} = w \sin\varphi$,

woraus man findet $y = \frac{w^2 \sin^2\varphi}{2g}$.

Setzt man diesen Wert für y, sowie die Größe $w \cos\varphi$ statt c, in die Gleichung 3),*)

so folgt $x = \frac{w^2 \cos\varphi \sin\varphi}{g} = \frac{w^2 \sin 2\varphi}{2g}$.

Wie construiert man am zweckmäßigsten mit den nun ermittelten Werten von x, y die Parabel?

2. Fall. Der Winkel der beiden Bewegungs-Richtungen, $\sphericalangle$ ZoY, sei größer als 90° (Fig. 19).

§ 10. Ist o der Ausgangspunkt der Bewegung, welche in der Richtung oZ mit der Geschwindigkeit c erfolgt, und nimmt man diesen Punkt als Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems oXY mit der Richtung der Beschleunigung p als jener

*) Kürzer durch Anwendung des Satzes von der Parabel-Subtangente.

der negativen y-Ordinaten, setzt man ferner den (spitzen) $\sphericalangle$ ZoX $= \alpha$, so kann, falls die Geschwindigkeit c in ihre Componenten $c \cos \alpha$ und $c \sin \alpha$ zerlegt wird, die gleichförmige Bewegung in der Richtung oZ durch jene in den Richtungen $+$oX und $+$oY ersetzt werden (§ 8), und die Lage o′ des bewegten Punktes nach der Zeit t ergibt sich durch Zusammensetzung dreier Bewegungen, nämlich zweier gleichförmiger mit den Geschwindigkeiten $c \cos \alpha$ und $c \sin \alpha$ und einer gleichmäßig veränderten mit der Beschleunigung p. Denkt man wieder diese drei Bewegungen als auf einander folgende,

so ist der Weg in der Richtung $+$oX . . . . . $oa = x = c \cos \alpha t$,
" " " " " " " $+$oY . . . . . $ab = c \sin \alpha t$,
" " " " " " " $-$oY . . . . . $bo' = \frac{p t^2}{2}$,

die Lage des Punktes o′ ist daher bestimmt durch

$$x = c \cos \alpha t \quad . . . . (1, \qquad y = ab - bo' = c \sin \alpha t - \frac{p t^2}{2} \quad . . . . . (2$$

Diese Gleichungen gelten für jeden Wert von t, es ergibt sich also bezüglich des gleichzeitigen Stattfindens dieser drei Bewegungen durch Elimination von t aus (1 und (2 eine Relation für alle Lagen des bewegten Punktes, nämlich die

$$\text{Curven-Gleichung} \quad . . \quad y = \operatorname{tang} \alpha . x - \frac{p x^2}{2 c^2 \cos^2 \alpha} \quad . . . (3$$

Jedem Werte von y entsprechen zwei Werte von x und insbesonders ist für $y = 0$, $x = 0$ und

$$x = od = \frac{2 c^2 \cos \alpha \sin \alpha}{p} = \frac{c^2 \sin 2 \alpha}{p} \quad . . . . (4$$

Die Geschwindigkeit w in einem Curvenpunkte o′ (Fig. 19), welchem die Bewegungszeit t und die Ordinaten x, y entsprechen, ist die Resultante aus der Geschwindigkeits-Differenz $c \sin \alpha - p t$ in der Y-Richtung und der Geschwindigkeit $c \cos \alpha$ in der X-Richtung. Es folgt

$$w^2 = (c \sin \alpha - p t)^2 + c^2 \cos^2 \alpha = c^2 - 2 p \left(c \sin \alpha t - \frac{p t^2}{2}\right),$$

also mit Benützung der Relation (2:

$$w = \sqrt{c^2 - 2 p y} \quad . . . . (5.$$

Die Richtung dieser Geschwindigkeit ist bestimmt durch $\cos \varphi = \frac{c \cos \alpha}{w}$. (6.

Im Punkte d, d. i. für $y = 0$, ist $w = c$ und $\sphericalangle \varphi = \sphericalangle \alpha$ wie bei o, jedoch entsprechend dem Bewegungssinne.

Die Ordinate y erreicht ihr Maximum y′ bezüglich jenes Curvenpunktes i, in welchem die Tangente horizontal, also die Geschwindigkeit $w = c \cos \alpha$ ist; damit folgt aus (5:

$$c^2 \cos^2 \alpha = c^2 - 2 p y', \text{ also } . . . \ y' = \frac{c^2 \sin^2 \alpha}{2 p} \quad . . . . (7.$$

Die der Ordinate y′ entsprechende Abscisse x′ ergibt sich aus (3

$$x' = of = \frac{c^2 \sin 2 \alpha}{2 p} \quad . . . . (8$$

u. z. als die Hälfte der Strecke od, welche oben bestimmt wurde.

Durch Zerlegung der (constanten) Beschleunigung p für irgend eine Lage des bewegten Punktes, z. B. für jene in o', ergeben sich wie früher die variablen Tangential- und Normal-Beschleunigungen.

Bei der weiteren Bewegung vom Punkte i aus besitzt der bewegte Punkt die Geschwindigkeit $c \cos \alpha$ in der X-Richtung nebst der Beschleunigung p in der Y-Richtung. Da diese Bewegung übereinstimmend mit jener des früheren Falles (Fig. 18) ist, so folgt, dass die Bahn oidk gleichfalls eine Parabel mit dem Scheitel im Punkte i und der Axe parallel zur oY ist, deren Parameter aus jenem $\left(\frac{2c^2}{p}\right)$ der früheren Curve durch Substitution von $c \cos \alpha$ statt c bestimmt wird.

Der gesuchte Parameter ist gleich $\frac{2 c^2 \cos^2 \alpha}{p}$.

Man beachte, dass für $x > ad$ d. i. für die unterhalb der X-Axe liegenden Curvenpunkte bei Anwendung der Formel 5) die Ordinate y negativ zu nehmen ist.

Anwendung: Ein schief aufwärts unter dem Winkel α (Elevations-Winkel) mit der Geschwindigkeit c geworfener Körper oder ein Wassertheilchen, welches in genannter Richtung mit dieser Geschwindigkeit aus einer Öffnung strahlt, unterliegen, falls vom Luftwiderstande abgesehen wird, diesen Gesetzen, wobei in obigen Formeln statt p die Freifall-Acceleration g einzuführen ist.

Speciell ergibt sich aus Form. 7) die Wurf- oder Steighöhe $if = y' = \frac{c^2 \sin^2 \alpha}{2g}$

" " " " Form. 4) die Wurfweite $od = 2x' = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{g}$.

Ferner die Zeit zur Erreichung dieser Wurfweite aus Form. 1)

$$t = \frac{x}{c \cos \alpha} \text{ und für } x = od, \quad t = \frac{2c \sin \alpha}{g}.$$

Beispiele.

1.) Es ist die nöthige Anfangs-Geschwindigkeit c zu bestimmen, damit bezüglich des Elevations-Winkels α ein durch die Abstände $x = a$, $y = b$ gegebener Punkt mittelst schiefen Wurfes getroffen wird.

Aus Form. 3) folgt: $c = \frac{a}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{g}{2a \tan \alpha - 2b}}$.

2.) Warum wird bei gegebener Geschwindigkeit c mit dem Wurfe unter dem $\sphericalangle \alpha$ dieselbe Wurfweite erreicht wie bezüglich des $\sphericalangle (90 - \alpha)$, und für welchen Winkel ist bei gegebener Größe c die Wurfweite ein Maximum?

3). Welchen Winkel gegen den Horizont muss ein Strahlrohr besitzen, damit das aus demselben mit einer gegebenen Geschwindigkeit c ausströmende Wasser einen durch die Abstände $x = a$, $y = b$ gegebenen Punkt trifft?

Durch Substitution von $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}$ in Form. 3) übergeht diese in

$$y = x \tan \alpha - \frac{g x^2 (1 + \tan^2 \alpha)}{2 c^2}, \text{ woraus gefunden wird}$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{ag}\left(c^2 \pm \sqrt{c^4 - g(2bc^2 + a^2 g)}\right).$$

3. Fall. Der Winkel der beiden Bewegungs-Richtungen, $\sphericalangle ZoY$, sei kleiner als 90° (Fig. 20).

Der Punkt o sei wieder der Ausgangspunkt der Bewegung und zugleich der Anfang eines rechtwinklichen Coordinatensystems, dessen + Y-Axe in der Richtung

der Beschleunigung p liegt und dessen + X-Axe mit der Richtung o Z der Geschwindigkeit c den Winkel α bildet.

Da rücksichtlich des früheren Falles (Fig. 19) begründet wurde, dass im Parabel-Punkte d sowohl der Geschwindigkeit als auch dem Geschwindigkeits-Winkel dieselben Größen c und α entsprechen, wie dort bei o, jedoch die Lage dieser Geschwindigkeit und dieses Winkels mit jener bei dem Punkte o des vorliegenden Bewegungsfalles (Fig. 20) übereinstimmt, so ist die vorliegende Bewegung identisch mit der über den Punkt d hinaus fortgesetzten Bewegung des früheren Falles, falls die Größen c, α und p in beiden Fällen beziehungsweise die gleichen sind. Es müssen daher die früheren Relationen 3) und 5) auch dem vorliegenden Falle entsprechen, wenn die Ordinate y und der Winkel α negativ genommen werden. Es folgt

die Parabel-Gleichung $y = \tan\alpha \cdot x + \frac{p x^2}{2 c^2 \cos^2 \alpha}$,

und rücksichtlich eines beliebigen Punktes o' die Geschwindigkeit

$$w = \sqrt{c^2 + 2py}.$$

Anwendung. Auch diese Gleichungen können, wie die früheren, zur Lösung von Aufgaben, jedoch nun bezüglich eines schief abwärts gerichteten Wurfes, (oder Wasser-Auslaufes) für p = g in Verwendung kommen.

Bewegung im Kreise als zusammengesetzte Bewegung.

§ 11. Besitzt der im Kreise vom Radius r (Taf. II, Fig. 21) gleichförmig oder ungleichförmig bewegte Punkt in irgend einem Zeitmomente die Geschwindigkeit c und wird der zu diesem Momente gehörende Bahnpunkt o als Ursprung eines rechtwinklichen Coordinatensystems mit der Tangente in o als X-Axe angenommen, so ist bekanntlich eine Parabel dadurch vollkommen bestimmt, dass ihr Scheitel in o, ihre Axe in der Coordinaten-Axe o Y und noch einer ihrer Punkte auf dem Kreise, z. B. in a mit den Coordinaten x, y, liegen soll.*) In dem Falle, in welchem der Punkt a unendlich nahe bei o liegt, wird der Radius r zum Scheitel-Krümmungsradius der nun entsprechenden Parabel und die Kreisbewegung übergeht bei o in eine parabolische u. zw. in eine nach dem ersten dieser Fälle (§ 9) zusammengesetzte Bewegung mit der Geschwindigkeit c in der X-Richtung und der noch zu bestimmenden Beschleunigung q in der Y-Richtung.

Für den Punkt a als parabolisch bewegten Punkt ist bezüglich der Zeit t

$$1)\ x = ct, \quad 2)\ y = \frac{q t^2}{2},$$

für diesen Punkt als Kreispunkt ist $x^2 = y(2r - y)$,

oder, falls a unendlich nahe bei o liegt, $x^2 = 2ry$.

Durch Substitution der Werte für x, y aus 1) und 2) resultiert

$c^2 t^2 = r q t^2$, also ist die Acceleration $q = \frac{c^2}{r}$.

---

*) Aus $x^2 = Py$ kann für jede Lage von a der entsprechende Parameter ermittelt, also die Parabel construiert werden.

Folgerung: Besitzt der im Kreise vom Radius r bewegte Punkt an irgend einer Stelle die Geschwindigkeit c, so unterliegt er an diesem Orte auch einer radial einwärts gerichteten Acceleration von der Größe $\frac{c^2}{r}$, (Normal-Acceleration). Dieselbe ist also bei der gleichförmigen Bewegung bezüglich aller Bahnpunkte der Größe nach constant, bei der ungleichförmigen variabel.

Geradlinig schwingende Bewegung.

Bewegt sich ein Punkt gleichförmig mit der Geschwindigkeit c im Kreise vom Radius r und Centrum o (Fig. 22) und zerlegt man für irgend eine Lage desselben, z. B. jene in u, die Normal-Acceleration $q = \frac{c^2}{r}$ nach zwei zu einander senkrechten, durch die Coordinaten-Axen o X, o Y repräsentierten Richtungen, in die Componenten p und p', desgleichen auch die Geschwindigkeit c nach denselben Richtungen in die Componenten v und v', so ist, falls $\sphericalangle X o u = \alpha$ gesetzt wird

$$p = q \cos \alpha, \quad v = c \sin \alpha.$$

Da die Richtung der Componente p entgegengesetzt jener der vom Centrum o aus gemessenen Abscissen x ist, so folgt für $x = r \cos \alpha$

$$p = \frac{c^2}{r} \cos \alpha = -\left(\frac{c}{r}\right)^2 x.$$

Die Projection des Punktes u auf die X-Axe, d. i. der Punkt u', besitzt also eine ungleichförmig geradlinig hin und hergehende Bewegung von der Art, dass die Beschleunigung p den Centrum-Abständen x proportial jedoch letzteren entgegengesetzt gerichtet ist; es entsteht eine einfache geradlinig schwingende Bewegung dieses Punktes u'.

In der Lage bei a ($\sphericalangle \alpha = 0$) besitzt der Punkt u' die Maximal-Beschleunigung von der Größe $\frac{c^2}{r}$ und die Geschwindigkeit gleich Null; letztere nimmt in der Richtung a gegen o immer mehr zu und erreicht in o ihr Maximum $v = c$, während dort die Beschleunigung gleich Null wird. Von o gegen b nimmt die Geschwindigkeit $c \sin \alpha$ wieder ab und die Verzögerung $\frac{c^2}{r} \cos \alpha$ nimmt zu bis wieder in b diese Geschwindigkeit gleich Null und die Verzögerung gleich $\frac{c^2}{r}$ wird. Dasselbe Gesetz gilt für die Rückbewegung in der Richtung b gegen a.

Die Zeit t zu einer Schwingung von der Länge $ab = 2r$ ist ebenso groß wie jene, welche der gleichförmig bewegte Punkt u zur Durchlaufung des Halbkreises $r\pi$ benöthigt, also ist $t = \frac{r\pi}{c}$.

Anwendungen.

1. Rotiert bei der in Fig. 23 dargestellten Schleifenkurbel der Kurbelzapfen u gleichförmig mit der Geschwindigkeit c im Abstande r von der Drehaxe o, so besitzt der an diesem Zapfen drehbar befestigte Gleitbacken zwei Bewegungen, die eine in der Richtung XX des Mittels einer hin und her bewegten Stange (z. B einer Pumpenstange), die andere senkrecht zu dieser in der Gleitbahn-Richtung YY.

Bezeichnet man den im Drehsinne **a u b** von **a** aus zu messenden Kurbelwinkel mit α, so können alle oben erörterten Gesetze auch auf die Bewegung der in der Richtung **X X** hin und her gehenden Schleife angewendet werden und man erkennt, dass diese Gesetze identisch sind mit jenen der Bewegung des Backens in der Schleife, d. i. seiner Bewegung in der Richtung **Y Y**, sobald man sich letztere Axe mit jener **X X** vertauscht, also den Winkel α vom Punkte i aus gemessen, denkt.

Beispiel.

Wenn bei einem derartigen Pumpen-Antriebe die Kurbelwelle minutlich $n = 40$ Touren macht, wie groß ist bei einem Hube $s = 0{\cdot}4\ m$ die Geschwindigkeit v und die Beschleunigung p des Pumpen-Kolbens bei der Kurbelstellung $\alpha = 30^\circ$, und wie groß ist dessen Maximal- und mittlere Geschwindigkeit?

In diesem Falle ist $2\,r = s = 0{\cdot}4\ m$, mithin

$$c = \frac{2\,r\,\pi\,n}{60} = 0{\cdot}2666\,\pi = 0{\cdot}84\ m.$$

$$v = c \sin\alpha = \frac{c}{2} = 0{\cdot}42\ m.$$

$$p = \frac{c^2}{r}\cos\alpha = 3{\cdot}0\ m.$$

Die Maximal-Kolben-Geschwindigkeit ist in der Mitte des Hubes und gleich c.

Die mittlere Kolben-Geschwindigkeit ist $= \dfrac{2\,s\,n}{60} = 0{\cdot}533\ m.$

2. Bestimmung der Schwingungszeit eines einfachen (mathematischen) Pendels.

Entspricht bei einem solchen Pendel von der Länge l mit verhältnismäßig kleinem Schwingungsbogen **a b** (Fig. 24), d. h. Bogen **a b** nahezu gleich Sehne **a b**, dem Ausschlagwinkel φ der Abstand x des schwingenden Punktes von der Pendel-Mittellage, so erfolgen die Schwingungen mit der Freifall-Accelerations-Componente

$$p = g \sin\varphi = -\frac{g}{l}\,x,$$

also, da auch die Geschwindigkeit dieses Punktes bei a und b gleich Null und in der Mitte am größten ist, übereinstimmend mit den eben erörterten Gesetzen, falls $\left(\frac{c}{r}\right)^2 = \frac{g}{l}$ gesetzt wird. Aus obiger Formel bestimmt man dann die Zeit t zu einer Schwingung

$$t = \frac{r\,\pi}{c} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Allgemeinster Fall der zusammengesetzten Bewegung.

§ 12. Das ist derjenige, bezüglich welches die Bewegung des Punktes in irgend einem Zeitmomente als das Ergebnis der Zusammensetzung mehrerer verschieden gerichteter Geschwindigkeiten und mehrerer verschieden gerichteter Accelerationen zu betrachten ist. Ersetzt man die Geschwindigkeiten durch ihre Resultante c (Fig. 25) und die Beschleunigungen durch ihre Resultante p, so ist dieser Fall auf einen der (in § 9, 10) besprochenen Fälle zurückgeführt und es sind, rücksichtlich dieses Zeitmomentes oder des diesem Zeitmomente

entsprechenden Bahnpunktes, durch die Richtung von c die Bewegungsrichtung, durch die Größe von c die Geschwindigkeit und durch die beiden Componenten von p, wovon die eine senkrecht zu c die zweite in oder entgegengesetzt der Richtung c liegt, die Normal- und Tangential-Acceleration bestimmt. Da man aber die Bewegung an dieser Bahnstelle während eines kleinen Zeittheiles durch die ihr gleiche auf dem entsprechenden Krümmungskreise vom Radius r ersetzen kann, so muss in diesem Bahnpunkte die Normal-Acceleration q die Größe $q = \frac{c^2}{r}$ besitzen, woraus umgekehrt zu den gegebenen Größen c und q die Größe und Richtung des dieser Bahnstelle entsprechenden Krümmungs-Radius ermittelt und damit ein kleiner Bahnbogen construiert werden kann. (Fig. 25).

Bekanntlich liegt bei einer Raumcurve der Krümmungskreis in der zugehörigen Osculations-Ebene, d. i. in der Ebene der zwei an der betreffenden Stelle auf einander folgenden Curven-Elemente.

In dieser Art erscheint also jeder Fall der krummlinigen Punkt-Bewegung als das Ergebnis einer steten Aufeinanderfolge von Zusammensetzungen geradliniger Bewegungen, wobei jeder Änderung des Bewegungszustandes, d. i. (allgemeinsten Falles) jeder Änderung der Bewegungsrichtung und der Geschwindigkeit, sowohl eine bestimmte Normal-Acceleration q als auch eine bestimmte Tangential-Acceleration p entspricht, und sich die Bahn des bewegten Punktes als eine ununterbrochene Aufeinanderfolge von Krümmungs-Kreisbögen in angegebener Weise darstellen lässt.

In dem besonderen Falle der geradlinigen Bewegung ist durchaus die Normal-Beschleunigung gleich Null und in jenem der gleichförmigen krummlinigen Bewegung ist fortwährend die Tangential-Beschleunigung gleich Null.

Relative Bewegung.

§ 13. Ändert bei der gleichzeitigen Bewegung zweier materieller Punkte (Kleinkörper, § 1) a und b, der eine, z. B. der Punkt b, fortwährend seine Lage gegen den zweiten Punkt, so befindet er sich zu letzterem in relativer Bewegung. Denkt man beiden Punkten, rücksichtlich jedes der auf einander folgenden Zeitmomente, eine dritte zusätzliche Bewegung von der Art ertheilt, dass der eine, z. B. a, ununterbrochen seine ursprüngliche Lage beibehält, also bezüglich des Raumes, in welchem sich beide Punkte bewegen, als ruhend erscheint, so erhält der zweite (b) eine zweifach zusammengesetzte Bewegung, durch welche die auf einander folgenden Änderungen seiner Lage rücksichtlich des ersten Punktes, also dessen relative Bewegung, d. i. seine Bewegung bezüglich jener des Punktes a, bestimmt ist.

Besitzt der eine Punkt (a) in irgend einem Zeitmomente eine Geschwindigkeit c, so erscheint er, falls beiden Punkten in diesem Momente eine zusätzliche Geschwindigkeit, gleich groß aber entgegengesetzt gerichtet der Geschwindigkeit c, ertheilt wird — als ruhend, und der Punkt b besitzt jetzt zwei Geschwindigkeiten, deren Resultante man als dessen relative Geschwindigkeit (rücksichtlich der Geschwindigkeit des Punktes a) bezeichnet.

Das Erörterte wird zunächst wieder auf solche Fälle der Körper-Bewegung in Anwendung gebracht, bei welchen diese Bewegung unmittelbar durch eine entsprechende Punkt-Bewegung bestimmt ist.

Beispiele.

1.) Stellen (in Fig. 26) a X und b Y die geraden Bahnen zweier, gleichzeitig von a und b aus beziehungsweise mit den constanten Geschwindigkeiten c und v bewegter Körper vor, und denkt man beiden während der Zeit t ununterbrochen eine zusätzliche Geschwindigkeit, gleich und entgegengesetzt jener c, ertheilt, wodurch der erste Körper als ruhend erscheint, so ergibt sich mittelst des Geschwindigkeits-Parallelogrammes bei b die relative Geschwindigkeit w des zweiten Körpers, also ist dessen relativer Weg b b′ während der Zeit t durch w t und mithin ist die Größe des Abstandes beider Körper nach dieser Zeit durch die Strecke b′ a bestimmt.

2.) Die Aufgabe, es ist zu bestimmen, wann und wie oft die Zeiger einer guten Uhr während 12 Stunden über einander stehen, läſst sich u. a. auch nach dem Principe der relativen Bewegung lösen. Bezüglich eines Zeigerpunkt-Kreises von der Peripherie u ist

die Geschwindigkeit des Stundenzeigers $c = \frac{u}{12 \cdot 60 \cdot 60}$,

" " " Minutenzeigers $v = \frac{u}{60 \cdot 60}$.

Denkt man beiden Zeigern die zusätzliche Geschwindigkeit $-c$ ertheilt, so hat der Minutenzeiger die relative Geschwindigkeit

$$v - c = \frac{u}{60 \cdot 60} - \frac{u}{12 \cdot 60 \cdot 60} = \frac{11\,u}{12 \cdot 60 \cdot 60},$$

er trifft zum erstenmale (nach 12 Uhr) den nun als ruhend erscheinenden zweiten Zeiger nach der Zeit

$$t = \frac{u}{v - c} = 65{\cdot}5 \text{ Minuten},$$

das zweitemal um dieselbe Zeit später, also im Ganzen 11mal während der 12 Stunden.

3.) Die zweite der im § 8 besprochenen Aufgaben kann auch dadurch gelöst werden, dass man dem Wasserrade — dessen Bewegung durch jene des Radumfangs-Punktes a (Fig. 15) bestimmt ist — und dem bei a einströmenden Wassertheile eine zusätzliche Geschwindigkeit, entgegengesetzt gleich der Rad-Umfangsgeschwindigkeit v, ertheilt denkt; die Resultante c aus dieser Geschwindigkeit $-v$ und aus der ursprünglichen Geschwindigkeit w des einströmenden Wassers, ist die gesuchte (relative) Geschwindigkeit des letzteren.

4.) Rotiert bei einem gewöhnlichen Kurbelgetriebe (Fig. 27), von der Stangenlänge l und dem Kurbelradius r, der Kurbelzapfen a mit der constanten Geschwindigkeit c, so denke man behufs Bestimmung der Kreuzkopf-Geschwindigkeit v, d. i. der Geschwindigkeit des Punktes b für den Kurbelwinkel α, den Punkten a und b, also der Stange, eine zusätzliche Geschwindigkeit, entgegengesetzt und gleich c, ertheilt; dann erscheint der Punkt a als ruhend und der Punkt b könnte sich nur in einem Kreise vom Radius l bewegen, die Resultante w von c und v muſs also in diesem Augenblicke senkrecht zu l stehen.

Für die Geschwindigkeit v, als Ordinate zum entsprechenden Kreuzkopfweg m b als Abscisse, ist das Geschwindigkeits-Dreieck in der Lage b f g zu zeichnen; es ergibt sich folgende einfache Construction:

$$bf \parallel oa \text{ und gleich } c, \quad bg \perp bo, \quad fg \parallel ab.$$

Als Ort der Punkte g erscheint die Curve m p n.

Da für gewöhnliche Fälle $\frac{r}{l} < \frac{1}{4}$ und mithin der Stangenwinkel β (Fig. 27) klein ist, so kann, für $\cos\beta \doteq 1$, aus dem Dreiecke b f g die Geschwindigkeit v annähernd bestimmt werden durch $v \doteq c \sin(\alpha + \beta)$. Aus dem Dreiecke o a b entnimmt man $\sin\beta = \frac{r}{l} \sin\alpha$, mithin ist

$$v = c\left(\sin\alpha + \frac{r}{l}\sin\alpha\cos\alpha\right) = c\left(\sin\alpha + \frac{r}{2l}\sin 2\alpha\right).$$

$v \doteq c\sin(\alpha + \beta)$ wird annähernd bei $\alpha + \beta = 90^\circ$ am größten, das entspricht derjenigen Kurbelstellung, bezüglich welcher die Stangenlinie den Kurbelkreis tangiert.

Bewegung eines festen Körpers.

§ 14. Es wird vorausgesetzt, dass der Körper (oder die Verbindung mehrerer Körper) als ein System von materiellen Punkten zu betrachten ist, deren gegenseitige Abstände während der Bewegung ungeändert bleiben. In diesem Falle ist die Lage des Körpers — rücksichtlich des Raumes, in dem er sich befindet, oder rücksichtlich eines zweiten Körpers, auf welchen die Bewegung des ersten bezogen wird — vollkommen bestimmt, sobald die Lage dreier seiner, nicht in einer Geraden liegenden Punkte a, b, c, bezüglich des genannten Raumes oder Körpers vollkommen bestimmt ist; denn denkt man irgend einen anderen Punkt d des Körpers mit diesen dreien und auch letztere unter einander verbunden, so ergibt sich ein Tetraeder, und es ist, wenn das Dreieck abc bei der Bewegung des Körpers in eine benachbarte Lage a′b′c′ kommt, auch die nächste Lage d′ des Puntes d — wegen $ad = a'd'$, $bd = b'd'$, $cd = c'd'$ — bestimmt. Da das vom Punkte d Gesagte auch rücksichtlich jedes anderen Körperpunktes gilt, so folgt, dass sobald die unmittelbar auf einander folgenden Lagen dieses Dreiecks bekannt sind, auch die Bewegung des ganzen Körpers gegeben ist.

Fortschreitende Bewegung.

Die drei Seiten des Bestimmungs-Dreieckes abc (Fig. 28) bleiben während der Bewegung zu sich parallel; beschreibt also der Punkt a die gerad- oder krummlinige Bahn aa′, so muss jedem Punkte dieser Linie in der Richtung der zu sich parallel bewegten Strecke ab ein Punkt der Bahn bb′ entsprechen; letztere Linie erscheint also als die in der Richtung ab verschobene Bahn aa′. Da nun ebenso jedem Punkte der Linie aa′ in der Richtung bc eine Lage des bewegten Punktes c entsprechen muss, als Punkt c aber jeder Punkt des Körpers gelten kann, so folgt, dass während jeder wie immer großen oder kleinen Bewegungszeit die Bahnen sämmtlicher Körperpunkte entweder gleich lange Parallel-Gerade oder congruente Parallel-Curven bilden.

Setzt man den allgemeinsten Fall, d. i. eine krummlinig ungleichförmige Bewegung voraus, so ist, da sämmtliche Körperpunkte während irgend eines sehr kleinen Zeittheiles τ gleiche und gleich gerichtete Weg-Elemente σ zurücklegen, für dieselben das Verhältnis $\frac{\sigma}{\tau}$ das gleiche, die Punkte besitzen also rücksichtlich dieses Zeitmomentes einerlei Bewegungs-Richtung und einerlei Geschwindigkeit, dieses gilt auch für den nächsten Zeittheil; mithin ist sowohl die während des Zeittheiles τ erlangte Richtungs-Änderung (Krümmung) als auch die Geschwindigkeits-Änderung für alle Punkte die gleiche. Da aber die

$$\text{Tangential-Beschleunigung } p = \frac{\text{Geschwindigkeits-Änderung}}{\text{Zeittheil}} \text{ und die}$$

$$\text{Normal-Acceleration } q = \frac{\text{Geschwindigkeits-Quadrat}}{\text{Krümmungsradius}} \text{ ist, so besitzen in}$$

irgend einem Bewegungs-Zeitmomente sämmtliche Körperpunkte einerlei Bewegungs-Richtung, einerlei Geschwindigkeit, einerlei Tangential-

Beschleunigung (Verzögerung) und einerlei Normal-Acceleration, wobei die Tangential-Beschleunigung während der ganzen Bewegung besonderen Falles auch constant (inclusive Null) sein kann. Bei der geradlinigen Bewegung ist die Normal-Acceleration gleich Null.

Durch die rücksichtlich eines Körperpunktes geltenden Bewegungsdaten ist also auch die Bewegung des ganzen Körpers bestimmt.

Die Bedingungen einer geradlinig fortschreitenden Bewegung sind vorhanden bei der Freifall-Bewegung, bei der Hub-Bewegung eines Dampfkolbens ꝛc. Die Bedingungen einer krummlinig fortschreitenden Bewegung sind vorhanden bei der Wurf-Bewegung, falls sämmtliche Körperpunkte wirklich einerlei Anfangs-Geschwindigkeit besitzen, bei der Bewegung des in Fig. 20 dargestellten Körpers, falls die Verbindungslinie irgend zweier Punkte desselben, z. B. der Punkte a, b, während der Bewegung stets zu sich parallel bleibt ꝛc.

Drehung um eine Axe.

§ 15. Die Lage zweier Punkte a,c des Bestimmungsdreiecks a b c bleibt während der Bewegung des Körpers ungeändert. (Fig. 29, E Dreieck-Ebene). Alle auf der durch die Punkte a,c bestimmten Geraden (Axe) liegenden Körperpunkte erscheinen als ruhend und der dritte Punkt b hat während der Bewegung von dieser Axe einen unveränderlichen Abstand r. Da als dieser dritte Punkt irgend einer der Körperpunkte zu denken ist, so folgt, dass in diesem Falle die Punktbahnen Kreisbögen in Ebenen senkrecht zur Axe sind.

Die im Abstande gleich eins von der Dreh-Axe liegenden oder liegend gedachten Punkte beschreiben, infolge Unveränderlichkeit ihrer gegenseitigen Entfernungen, gleichzeitig congruente Drehbögen, welchen gleiche Dreh-Winkel entsprechen, mithin sind ihre während irgend eines Bewegungs-Zeittheiles durchlaufenen Bahn-Elemente gleich groß, also besitzen sie rücksichtlich dieses Zeitmomentes einerlei Geschwindigkeit $\omega = \frac{\text{Bahn Element}}{\text{Zeittheil}}$. Dieses gilt auch bezüglich des nächsten Zeittheiles. Es ist also, den allgemeinsten Fall d. i. eine ungleichförmige Bewegung vorausgesetzt, in diesem Augenblicke auch die Beschleunigung $\varepsilon = \frac{\text{Geschwindigkeits Änderung}}{\text{Zeittheil}}$ für alle diese Punkte die gleiche. Es folgt: die im Abstande gleich eins von der Dreh-Axe liegenden Punkte besitzen in irgend einem Bewegungs-Zeitmomente einerlei Geschwindigkeit ω und einerlei Beschleunigung (Verzögerung) ε.

Diese beiden mit dem Winkelmaße (rad. = 1) übereinstimmenden Größen ω und ε werden beziehungsweise als Winkel-Geschwindigkeit und Winkel-Beschleunigung bezeichnet, während man die analogen jedoch einem anderen Abstande (rad. = r) von der Drehaxe entsprechenden Größen als Umfangs-Geschwindigkeit (v) und Umfangs-Beschleunigung (p) benennt.

Entspricht (Fig. 29) dem Punkte β im Abstande gleich eins von der Drehaxe auf derselben Radiuslinie der Punkt b im Abstande r, sind ferner σ und s die von diesen Punkten gleichzeitig während des sehr kleinen Zeittheils τ durchlaufenen Wege, so ist

$$\frac{\sigma}{\tau} : \frac{s}{\tau} = \omega : v = 1 : r. \quad \text{Es folgt:}$$

$$\text{Winkelgeschwindigkeit } \omega = \frac{\text{Umfangs-Geschwindigkeit v}}{\text{Radius r}}$$

Da dieses Gesetz auch bezüglich des nächsten Zeittheils gilt, so gilt es von den beiden Geschwindigkeits-Änderungen und mithin auch von den während dieses Zeitmomentes statt findenden Beschleunigungen beider Punkte.

Es folgt

$$\text{Winkel-Beschleunigung (Verzögerung) } \varepsilon = \frac{\text{Umfangs-Beschleunigung p}}{\text{Radius r}}.$$

Zu jedem Körperpunkte gehört auf seiner Radiuslinie ein Punkt im Abstande gleich eins, alle Punkte im Abstande gleich eins haben aber gleichzeitig einerlei Winkel-Geschwindigkeit ω und einerlei Winkel-Beschleunigung ε, also entsprechen allen Körperpunkten gleichzeitig dieselben Werte von ω und ε, d. h. der ganze Körper besitzt in irgend einem Zeitmomente die Winkel-Geschwindigkeit ω und Winkel-Beschleunigung ε, u. zw. übereinstimmend mit den in angegebener Weise zu bestimmenden Größen ω und ε bezüglich eines seiner Punkte. Es ist also in diesem Falle die Bewegung des ganzen Körpers durch jene eines seiner Punkte bestimmt.

Rotiert ein Körper gleichförmig um eine Axe mit n Touren pro Minute, so ist der secundliche Weg eines seiner im Abstande gleich eins von dieser Axe liegenden Punkte, also die der Bewegung des Körpers entsprechende

$$\text{Winkelgeschwindigkeit } \omega = \frac{2\pi n}{60}.$$

Rotiert ein Körper zuerst gleichförmig mit n Touren pro Minute, dann gleichmäßig verändert während der Zeit t und schließlich wieder gleichförmig mit n' Touren pro Minute, so ist rücksichtlich der gleichmäßig veränderten Bewegung, dessen

$$\text{Anfangs-Winkelgeschwindigkeit } \omega = \frac{2\pi n}{60}$$

$$\text{End-Winkelgeschwindigkeit } \omega = \frac{2\pi n'}{60}.$$

$$\text{Winkel-Beschleunigung } \varepsilon = \frac{\omega - \omega'}{t} \text{ (§. 5).}$$

Da der Weg eines im Abstande gleich eins von der Dreh-Axe liegenden Punktes während der Zeit t durch

$$s = \left(\frac{\omega + \omega'}{2}\right) t \text{ bestimmt ist,}$$

so ist die Zahl der Touren des Körpers während dieser Zeit

$$x = \frac{s}{2\pi} = \frac{(\omega + \omega')\, t}{4\pi}.$$

Beginnt die gleichmäßig beschleunigte Bewegung von der Ruhe aus, so ist ω = Null.

Dauert die gleichmäßig verzögerte Bewegung bis zur Ruhe, so ist ω' = Null.

Anwendung. Bei einer gewöhnlichen Dampfmaschine (Fig. 10) ist die Länge s des Kolbenhubes gleich dem doppelten Abstande des Kurbelzapfen-Mittels a von der Dreh-Axe, ($s = 2\,r$). Die Geschwindigkeit des Kolbens ist, übereinstimmend mit jener des Kreuzkopfes b, am Anfange und am Ende des Hubes gleich Null und ungefähr in der Mitte des letzteren am größten, die Kurbel hat zumeist eine (nahezu) gleichförmige rotierende Bewegung, doch kann sie auch unter Umständen z. B. beim Anlassen oder Abstellen der Maschine eine (nahezu) gleichmäßig veränderte Bewegung während kurzer Zeit annehmen. In irgend einem Bewegungs-Zeitmomente entspricht der Kurbelwelle sammt den auf ihr aufgekeilten Kurbeln, Scheiben, Rädern zc. eine bestimmte Winkel-Geschwindigkeit und desgleichen eine bestimmte Winkel-Beschleunigung. Für den Fall der gleichförmigen Kurbel-Bewegung mit minutlich n Touren ist (nach §. 6) die

$$\text{mittlere Kolben-Geschwindigkeit } c = \frac{2\,n\,s}{60}.$$

Beispiele. 1. Wie groß ist bei genannter Maschine die Geschwindigkeit v des Kurbelzapfens und die Winkel-Geschwindigkeit ω der Kurbel, falls die mittlere Kolben-Geschwindigkeit $c = 1{\cdot}2\,m$ und der Kolbenhub $s = 800\,mm$ ist.

$$\text{Aus } c = \frac{2\,n\,s}{60} \text{ und } v = \frac{2\,r\,\pi\,n}{60} = \frac{s\,\pi\,n}{60} \text{ folgt}$$

$$\frac{n\,s}{60} = \frac{c}{2} \text{ also } v = \frac{\pi\,c}{2} = \frac{3{\cdot}14.1{\cdot}2}{2} = 1{\cdot}88\,m$$

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{1{\cdot}88}{0{\cdot}4} = 4{\cdot}7\,m.$$

2. Wenn sich bei dieser Maschine nach dem Aufhören der Dampfwirkung das Schwungrad noch während 30 sec. nahezu gleichmäßig verzögert bewegt, wie viele Touren macht es während dieser Zeit und wie groß ist die Winkel-Verzögerung dieses Rades?

Da zu Beginn der verzögerten Bewegung die Winkel-Geschwindigkeit ω dieses Rades ebenfalls die früher bestimmte Größe $\omega = 4{\cdot}7$ besitzt, so folgt die gesuchte Tourenzahl x aus obiger Formel (für ω' gleich Null)

$$x = \frac{\omega\,t}{4\,\pi} = \frac{4{\cdot}7.\,30}{4\,\pi} = 11{\cdot}2.$$

$$\text{Winkel-Verzögerung } \varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{4{\cdot}7}{30} = 0{\cdot}157\ m.$$

Bewegung parallel zu einer Ebene.

§ 16. Die Abstände der Punkte a b c des Bestimmungs-Dreieckes von einer Ebene E (Fig. 30) bleiben während der Bewegung ungeändert, mithin ist durch die Bewegung der orthogonalen Projection a′ b′ c′ von a b c auf die Ebene E zugleich die Bewegung des genannten Dreieckes und damit jene des ganzen Körpers gegeben. Ist $a_1 b_1 c_1$ die gegebene neue Lage dieses Dreieckes und $a'_1\ b'_1\ c'_1$ deren Projection, so kann die frühere Projection a′ b′ c′ in die neue Lage am einfachsten mittelst Drehung einer ihrer Seiten, z. B. der a′ b′ in die Lage $a'_1\ b'_1$, gebracht werden. Ist (in Fig. 31) die Ebene E die Zeichnungsfläche, so liegt bekanntlich das zu den Drehbögen $a'\,a'_1$ und $b'\,b'_1$ gehörige Centrum o im Schnitte der beiden hier entsprechenden Sehnen-Halbierungs-Normalen. Es ist der Drehwinkel $\varphi = \sphericalangle\, a'\,o\,a'_1$. Mittelst derselben Drehung, jedoch um eine durch den Punkt o senkrecht zur Ebene E liegende Axe o X, kommt auch der ganze Körper aus der ersten Lage in die zweite, diese Axe liegt also im Schnitte zweier Ebenen, welche beziehungsweise die Strecken $a\,a_1$ und $b\,b_1$ normal halbieren.

Im Allgemeinen werden jedoch die Bahnen der Punkte a und b, und mithin auch deren zu ihnen congruente Projectionen auf die Ebene E, irgend welche Curven sein können, wobei den sehr nahe liegenden Projectionen a', a'_1, a'_2 . . . . . (Fig. 32) der Lagen des ersten Punktes beziehungsweise jene b', b'_1, b'_2 . . . . der Lagen des zweiten Punktes entsprechen. Construiert man zu je zwei einander entsprechenden Curven-Elementen, z. B. zu $a'_1\ a'_2$ und $b'_1\ c'_2$, wie früher, die zugehörigen Dreh-Centren (o), so ergibt sich als Orte aller dieser Punkte eine Curve und mithin rücksichtlich der Körper-Bewegung als Ort aller normal zur Ebene E stehenden Dreh-Axen eine Cylinderfläche. Die oben genannte Bewegung des Körpers kann also auf eine stete Aufeinanderfolge von kleinen Drehungen um in angegebener Weise zu bestimmende augenblickliche Dreh-Axen (Momentan-Axen) zurückgeführt werden.

Beispiel. Bei dem bereits (in §. 13, Beispiel 4) besprochenen Kurbelgetriebe (Fig. 27) bewegt sich die Stange von der Länge l parallel einer durch beide Stangenkopf-Mittel a, b gelegten Vertical-Ebene. Für die durch den Winkel α bestimmte Stellung der Kurbel ist, falls diese Ebene unmitttelbar als Projections-Ebene gedacht wird, die Richtung des Bahn-Elementes des Punktes a durch die entsprechende Tangente am Kurbelkreise (rad. = r) und jene des Bahn-Elementes bei b durch die Richtung m n bestimmt; also ist eine der zur Zeichnungsfläche senkrecht stehenden Momentan-Axen durch den Schnittpunkt o' der beiden in a und b zu den genannten Richtungen beziehungsweise senkrecht stehenden Geraden a o' und bo' gegeben. Denkt man die Stange momentan um diese Axe o' gedreht, so ergibt sich, daß die Geschwindigkeiten c und v der Punkt a und b den Dreh-Radien o'a und o'b proportional sein müssen. Wird wieder (wie in §. 13) die Voraussetzung gemacht, dass das Verhältnis $\frac{r}{l} < \frac{1}{4}$ also $\sphericalangle \beta$ klein ist, so ist annähernd $o'b = o'a \sin(\alpha + \beta)$ und mithin

$$\frac{o'b}{o'a} = \frac{v}{c} = \sin(\alpha + \beta) \text{ oder } v = c \sin(\alpha + \beta).$$

Für $\sin \beta = \frac{r}{l} \sin \alpha$ findet man, wie früher, näherungsweise

$$v = c\left(\sin \alpha + \frac{r}{2l} \sin 2\alpha\right).$$

Drehung um einen Punkt.

Die Lage eines Punktes des Bestimmungs-Dreiecks a b c, z. B. jene des Punktes c, bleibt während der Bewegung des Körpers ungeändert. Dieser Bedingung entsprechend können die Bahnen der Punkte a und b nur auf Kugeln von den Radien a c und bc liegen, also liegen überhaupt die Bahnen der Körperpunkte auf Kugeln, deren jede den Abstand des betreffenden Punktes vom Drepunkte c zum Radius hat.

Soll das Bestimmungs-Dreieck aus der Lage a b c in eine zweite Lage $a_1\, b_1\, c$ (Fig. 33 gebracht) werden, so kann dieses am einfachsten dadurch geschehen, dass die Bahnen der Punkte a und b zwei Kreisbögen bilden, welche einer Rotation dieses Dreiecks um eine durch den Punkt c gehende Axe entsprechen. In diesem Falle muss, wie oben erörtert, die Dreh-Ebene für den Punkt a die Richtung $a\, a_1$ und die Dreh-Ebene für den Punkt b die Richtung $b\, b_1$ enthalten, dann steht die gesuchte Dreh-Axe c X normal zu diesen Ebenen. Da stets durch den Punkt c eine Ebene E gelegt werden kann, welche durch zwei zu den Strecken aa_1 und bb_1 parallele Gerade bestimmt ist, so ist diese Axe und mithin diese Drehung stets möglich. Macht man diese Ebene zur Projections-Ebene (Fig. 33) beziehungsweise zur Zeichnungsfläche (Fig. 34), so ergibt sich, da die Drehbögen $a\, a_1$ und $b\, b_1$ zur Ebene E parallel liegen, der unmittelbar vorher gehende Constructionsfall rücksichtlich des Drehcentrums c; die Dreh-Axe c X liegt also wieder im Schnitte zweier Ebenen, welche die Strecken $a\, a_1$ und $b\, b_1$ normal halbieren.

Durch diese Drehung kommt zwar das Bestimmungs-Dreieck aus der Lage a b c in die Lage $a_1\, b_1 c$, jedoch die beiden Kreis-Bahnen der Punkte a und b liegen (im allgemeinen) nicht auf den Kugeln von den Radien a c und b c, wie es nach obiger Bedingung sein sollte; nur für den Fall einer sehr kleinen Drehung (Momentan-Drehung) um diese Axe o X, rücksichtlich welcher die Bahnen $a\, a_1$ und $b\, b_1$ als Curven-Elemente zu betrachten sind, würde diese Bedingung erfüllt. Entsprechen daher den unmittelbar auf einander folgenden Lagen $a\, a_1\, a_2 \ldots$ des

Punktes a beziehungsweise die Lage b b_1 b_2 . . . des Punktes b, so kann man zu je zwei zusammengehörigen Bahn-Elementen, z. B. zu a_1 a_2 und b_1 b_2, eine solche Ebene E und mithin eine solche Dreh-Axe c X construieren; der geometrische Ort aller dieser Axen ist eine Kegelfläche mit dem Centrum im Fixpunkte c. Die Bewegung des Körpers läſst sich also auch in diesem Falle auf eine stete Aufeinanderfolge von kleinen Drehungen um in angegebener Weise zu bestimmende Axen (Momentan-Axen) zurückführen.

Beispiel. Bei dem Universal-Gelenke oder Hook'schen Schlüssel (Fig. 36) wird die Bewegung von der treibenden an ihrem Ende gegabelten Welle fuab mittelst der Bewegung eines Zwischenkörpers abcd auf eine zweite unter irgend einem Winkel (nicht über 30°) gegen die erste geneigte und an ihrem Anfange in gleicher Art gegabelte Welle gvcd übertragen, im Punkte o schneiden sich die beiden Wellen-Mittel. Ist nun dieser Zwischenkörper so geformt, dass er zwei gleich lange zu einander normale Symetrie-Axen besitzt, dass er also ein sogenantes Axenkreuz bildet, oa = ob = oc = od, welches in den vier Gabelenden a, b, c, d drehbar gelagert ist, so bewegt er sich derart, dass seine erste Axe ab in einer Ebene E senkrecht zum Wellenmittel fo, die zweite Axe cd in einer Ebene E' senkrecht zum Wellenmittel og bleibt und der Schnitt beider Axen mit dem Fix-Punkte o zusammenfällt. Es liegen also die Bahnen der Punkte a und c auf einer Kugel vom Radius oa = oc und mithin besitzt dieser Zwischenkörper, das Dreieck aoc als Bestimmungsdreieck gedacht, eine um den Punkt o drehende Bewegung. Letztere ist vollkommen bestimmt, denn zu jeder Lage des bewegten Punktes a ist die entsprechende von c dadurch gegeben, daß die Strecke oc im Drehsinne sowohl in der Ebene E' als auch normal zur Strecke oa bleiben muß.

Allgemeinster Bewegungsfall.

§ 17. Das Bestimmungsdreieck abc soll bei irgend einer Bewegung des frei beweglichen Körpers in eine zweite Lage $\alpha\beta\gamma$ kommen (Fig. 33). Würde man zuerst das Dreieck abc nach dem unmittelbar vorhergehenden Falle, wobei also ein Eckpunkt, z. B. der Punkt c, fix bleibt, in eine solche Lage $a_1 b_1 c$ bringen, dass $a_1 b_1 \parallel \alpha\beta$, $b_1 c \parallel \beta\gamma$, $a_1 c \parallel \alpha\gamma$ wird, so wäre die hiezu nöthige Projections-Ebene E und Dreh-Axe c X wie früher zu bestimmen, und es würde durch die Drehung um diese Axe und eine darauf folgende geradlinig fortschreitende Bewegung (Rückung) in der Richtung und von der Größe der Strecke $c\gamma$ der Körper die dem Dreiecke $\alpha\beta\gamma$ entsprechende Lage erhalten.

Durch diese zwei Bewegungen kommt zwar das Bestimmungs-Dreieck aus der Anfangslage abc in die Endlage $\alpha\beta\gamma$, aber die Zwischenlagen werden im allgemeinen nicht mit jenen der vorliegenden Körper-Bewegung übereinstimmen. Sind jedoch bezüglich letzterer je zwei sehr nahe auf einander folgende Lagen abc und $\alpha\beta\gamma$ des Bestimmungs-Dreieckes bekannt, so kann zu jedem Paare dieser Lagen in angegebener Weise eine Momentan-Drehaxe c X und eine Momentan-Rückungs-Strecke $c\gamma$ bestimmt und in dieser Art die ganze Bewegung durch eine ununterbrochene Aufeinanderfolge von momentanen Drehungs-Rückungs-Bewegungen ersetzt werden, wobei jede Lage der Drehaxe mit der Bahn des Punktes c einen Punkt gemein hat; der geometrische Ort dieser Axen ist also eine Regelfläche mit der genannten Punktbahn als Leitcurve.

Denkt man, aus in der Dynamik zu erörternden Gründen, als den Dreieck-Punkt c den Schwerpunkt des Körpers gewählt, so ist, da jede Lage der Drehaxe eine Lage dieses Punktes enthält, der Schwerpunkt an den genannten Drehungen

nicht betheiligt. Die Bewegung des Schwerpunktes ist also in erörterter Art nur von den auf einander folgenden Rückungs- oder fortschreitenden Bewegungen des Körpers abhängig.

Bei der eingangs erörterten Drehung um die Axe o X kommt die Projection a′ b′ c des Dreieckes a b c in die Lage a_1′ b_1′ c als Projection von a_1 b_1 c. Da nun die beiden Dreiecke a_1 b_1 c und $\alpha\beta\gamma$ mit wechselweise parallelen Seiten congruent sind, so sind auch deren Projectionen auf die Ebene E congruent, d. h. es ist a_1′ b_1′ c ≌ A′ B′ C und mithin ist auch a′ b′ c ≌ A′ B′ C. Macht man daher diese Ebene zur Zeichnungsfläche (Fig. 35), so läſst sich stets, nach dem 3. Falle, zu den beiden Dreiecken z_1′ b_1′ c und A′ B′ C ein Dreh-Centrum o von der Eigenschaft bestimmen, daſs mittelst einer durch o senkrecht zur Ebene E stehenden Axe o Y (Fig. 33) das Raum-Dreieck a b c in eine der Projection A′ B′ C entsprechende Lage ABC, also in eine solche Lage gebracht wird, daſs durch eine darauf folgende Rückung in der Richtung der Axe o Y und von der Größe der Strecke Cγ dieses Dreieck a b c die Lage $\alpha\beta\gamma$ erhält. Der Körper kann also aus seiner ersten Lage in die zweite gebracht werden mittelst einer Rotation um die in angegebener Weise zu bestimmende Axe o Y und einer Rückung parallel zu dieser Axe, wobei, nach dem bei dem zweiten und ersten Falle Erörterten, diese beiden Körper-Bewegungen bestimmt sind, sobald die Bewegungsdaten rücksichtlich eines der Körperpunkte bekannt sind.

Denkt man, daſs diese beiden Körper-Bewegungen nicht hinter einander, sondern gleichzeitig stattfinden, so rückt jeder der Körperpunkte, z. B. der Punkt a, während er sich um die Axe o Y entsprechend dem Dreh-Winkel φ dreht, parallel zu dieser Axe vorwärts um die Strecke Cγ, wobei also a nach α kommt. Jeder der Punkte beschreibt mithin eine Schraubenlinie, weshalb diese zusammengesetzte Körper-Bewegung eine Schrauben-Bewegung und die Axe o Y eine Schraubenaxe genannt wird.

Besitzt der Körper eine ganz willkürliche Bewegung, so können rücksichtlich irgend zweier sehr nahe auf einander folgenden Lagen a b c und $\alpha\beta\gamma$ des Bestimmungs-Dreieckes die Bahn-Elemente aα, bβ, cγ als solche Schraubenlinien-Elemente betrachtet und kann in angegebener Weise zu den Dreiecken a b c und $\alpha\beta\gamma$ eine dieser kleinen Schrauben-Bewegung entsprechende Axe | Momentan-Axe | bestimmt werden. In dieser Art ist also die ganze Körper-Bewegung durch eine continuierliche Aufeinanderfolge von Schrauben-Bewegungen zu ersetzen, deren jede, nach dem oben Gesagten, durch die betreffenden Bewegungsdaten eines der Punkte des Körpers bestimmt ist.

Anmerkung.

Das über die Körper-Bewegung Erörterte (§. 14 bis §. 17) gehört zu den Grundlehren der „speciellen Kinematik oder Maschinengetriebslehre", während die vorausgehenden Gesetze der Punkt-Bewegung sammt dort besprochenen Anwendungen gewöhnlich unter dem Titel „Phoronomie" abgehandelt worden. Unter „Kinematik im allgemeinen" versteht man die rein mathematische Bewegungslehre.

Dynamik fester Körper.

§ 18. Unter Dynamik versteht man die Lehre von der Bewegung der Körper mit Rücksicht auf die Ursachen dieser Bewegung.

Besitzen bei Beginn der Bewegung sämmtliche Körperpunkte einerlei Bewegungs-Richtung und einerlei Geschwindigkeit, und bleibt dieser Zustand während der ganzen Bewegung der gleiche, d. h. ist die Bewegung eine geradlinig-gleichförmige, so ist als Ursache derselben nur die Eigenschaft der Trägheit oder des Beharrungsvermögens anzunehmen, vermöge welcher der Körper seinen Bewegungszustand, den Zustand der Ruhe mit inbegriffen, durch sich selbst, also ohne alle äußere Einwirkung, nicht zu ändern vermag. Jede andere Bewegung setzt bezüglich jedes der auf einander folgenden Bewegungs-Zeitmomente Änderungen seiner Punkt-Bewegungszustände voraus (§ 2).

Unter Kraft versteht man die Ursache der in irgend einem Zeitmomente stattfindenden Änderung der Bewegungszustände materieller Punkte, den Zustand der Ruhe mit inbegriffen. Von der Art und Größe dieser Änderung ist auch die Art und Größe der Kraft abhängig. Dieser Kraftbegriff kommt im Folgenden sowohl bei der Bewegung eines materiellen Punktes als auch bei jener eines Systems materieller Punkte, d. i eines Körpers oder Körpertheiles, zur Verwendung.

Allgemeines über Kräfte.

Falls eine stete Aufeinanderfolge der genannten Bewegungszustands-Änderungen auf eine Ursache, also auf das ununterbrochene Wirken einer Kraft zurückgeführt werden kann, so nennt man letztere eine continuierlich-wirkende Kraft. Je nachdem hierbei rücksichtlich der auf einander folgenden Bewegungs-Zeitmomente die Größe oder Intensität, und mithin auch die Maßzahl dieser Kraft, constant oder veränderlich ist, nennt man die ununterbrochen wirkende Kraft in dem einen Falle eine constant wirkende oder constante Kraft, in dem anderen eine veränderliche oder variable Kraft.

Insofern die Änderung der Bewegungszustände materieller Punkte rücksichtlich irgend eines Bewegungs-Zeitmomentes in einer Vermehrung oder Verminderung der Geschwindigkeiten dieser Punkte bestehen kann, unterscheidet man zwischen beschleunigenden und verzögernden Kräften. Zu letzteren gehören die entgegengesetzt dem Bewegungssinne wirkenden Widerstandskräfte oder Widerstände, z. B. die Reibung, Festigkeit 2c. Im Gegensatze zu diesen kann man die im Sinne der Bewegung wirkenden Kräfte als treibende Kräfte (Zug-, Druck-Kräfte 2c.) bezeichnen. Wirken gleichzeitig Kräfte beider Arten, so kann auch möglicherweise bezüglich der auf einander folgenden Bewegungszeitmomente keine Änderung des ursprünglich bei allen Punkten gleichen Bewegungszustandes eintreten, d. h. ein Körper oder Körper-

theil kann sich bei gewisser Beschaffenheit der auf ihn wirkenden Kräfte in Ruhe oder in geradlinig-gleichförmiger Bewegung befinden; in diesem Falle halten sich die Kräfte das Gleichgewicht.

Besitzt ein Körper oder ein Körpertheil gewisse Eigenschaften, ist er z. B. bewegt, belebt, magnetisch rc., und ist von einer dieser oder von einer der sonstigen Eigenschaften dieses Systems materieller Punkte, z. B. von dessen Lage, die Änderung der Bewegungszustände anderer materieller Punkte abhängig, so erscheint er als Träger oder Ursprung einer Kraft, z. B. einer Stoßkraft, Muskelkraft, Federkraft, Anziehungskraft (Schwerkraft) u. s. w. Je nachdem dieser Ursprung einer Kraft außerhalb oder innerhalb des Systems materieller Punkte liegt, auf welches oder innerhalb welches diese Kraft wirkt, nennt man letztere eine äußere oder innere Kraft.

Rücksichtlich beider Arten von Kräften gilt das durch zahlreiche Erfahrungen bestätigte Grundgesetz: „„dass eine von materiellen Punkten ausgehende und auf andere wirkende Kraft, in letzteren Punkten stets eine der ersten entgegengesetzt gleiche Kraft hervorruft."" (Action gleich Reaction, Princip der Wechselwirkung.)

Die in irgend einem Zeitmomente stattfindende Änderung der Lage des ganzen Körpers in dem ihn umgebenden Raume ist eine Folge der Wirkung äußerer Kräfte oder, falls sich diese das Gleichgewicht halten, eine Folge der Trägheit des Körpers; ebenso ist die in irgend einem Zeitmomente stattfindende Änderung der gegenseitigen Lage einzelner oder sämmtlicher materiellen Punkte des Körpers innerhalb des durch seine Oberfläche begrenzten Raumes eine Folge der Wirkung innerer Kräfte.

Zu letzteren gehören insbesonders die zwischen den materiellen Punkten desselben Körpers wirkenden mit dem Namen „Elasticitäts-Widerstände" bezeichneten Kräfte, von welchen erörtert wurde, dass „„wenn irgend welche äußere Kräfte auf einen festen aber nicht als „starr" vorausgesetzten Körper wirken, dieser so lange eine Formänderung erleidet, bis die gleichzeitig hervorgerufenen genannten inneren Kräfte eine hinreichende Größe haben um jede weitere Formänderung zu verhindern,"" d. h. bis der Körper als ein System fix mit einander verbundener materieller Punkte erscheint, (starres System)*; im Folgenden wird zunächst diese Beschaffenheit eines Körpers bei seiner Bewegung vorausgesetzt, also angenommen, dass auf die in irgend einem Zeitmomente stattfindende Änderung der Bewegungszustände sämmtlicher materieller Punkte die inneren Kräfte ohne Einfluss sind.

Kräfte, wirksam auf einen frei beweglichen materiellen Punkt.

§ 19. Die Änderung des Bewegungszustandes eines Punktes besteht (nach §. 2) entweder 1. in einer Änderung seiner Bewegungs-Richtung, oder 2. in einer Änderung seiner Geschwindigkeit (jene gleich Null mit inbegriffen), also in dem Entstehen einer Beschleunigung (Verzögerung), oder 3. in beiden genannten Änderungen zugleich. Da aber eine Richtungs-Änderung ebenfalls das Entstehen einer Beschleunigung, nämlich der Normal-Acceleration bedingt (§ 12), so ist in allen Fällen die Ursache der

*) Erster Theil, § 2.

Änderung des Bewegungszustandes eines materiellen Punktes, also eine Kraft, zugleich die Ursache des Entstehens einer Beschleunigung oder Verzögerung, (beschleunigende Kraft oder verzögernde Kraft. Es folgt daraus

1. Eine Kraft ist auf einen frei beweglichen materiellen Punkt (Kraft-Angriffspunkt) in der Richtung der von ihr hervorgerufenen Beschleunigung oder Verzögerung wirksam, diese Richtung bezeichnet man als Kraftrichtung.
2. Die Größe oder Intensität dieser Kraft ist der Größe der genannten Beschleunigung (Verzögerung) proportional. Bleibt letztere während der Bewegung ungeändert, so bleibt auch die Größe der auf den Punkt continuierlich wirkenden Kraft ungeändert.

In diesen zwei Gesetzen liegt die Begründung dass, falls der materielle Punkt in irgend einem Bewegungs-Zeitmomente mehrere Beschleunigungen besitzt, die den letzteren entsprechenden Kräfte durch Strecken in der Richtung und proportional den Beschleunigungen dargestellt und dass diese Kräfte durch eine Kraft-Resultante ersetzt werden können, welche als Ursache der resultierenden Beschleunigung (Verzögerung) zu betrachten und so wie letztere zu bestimmen ist (§ 8).

Ist diese Kraftresultante und damit auch die resultierende Beschleunigung während der ganzen Bewegung gleich Null (Gleichgewicht der Kräfte), so befindet sich der materielle Punkt entweder in Ruhe oder in gleichförmig-geradliniger Bewegung.

Eine geradlinige gleichmäßig-veränderte Bewegung entsteht, falls diese Kraft-Resultante bei gleich bleibender Bewegungs-Richtung eine constante Beschleunigung oder Verzögerung hervorruft, falls sie also eine continuierlich wirkende Kraft von constanter Größe, d. h. eine constante Kraft, ist.

Eine geradlinige ungleichmäßig-veränderte Bewegung entsteht, falls diese Kraft-Resultante bei gleich bleibender Bewegungs-Richtung eine nicht constante Beschleunigung (Verzögerung) hervorruft, falls sie also eine continuierlich wirkende Kraft von veränderlicher Größe, d. h. eine variable Kraft, ist.

Eine gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit v im Kreise vom Radius r entsteht, falls diese Kraft-Resultante nur die während der ganzen Bewegung constante Richtungs-Änderung bewirkt, also in jedem Bahnpunkte die Normal-Acceleration von der constanten Größe $q = \frac{v^2}{r}$ hervorruft (§ 11). Diese auf den bewegten Punkt continuierlich radial einwärts wirkende Kraft wird Normalkraft oder Centripetalkraft genannt.

Die gleichförmige Bewegung in irgend einer krummlinigen Bahn entsteht, falls bezüglich jeder Lage des bewegten Punktes die genannte Kraft-Resultante die Centripetalkraft zur Bewegung des Punktes auf dem betreffenden Ortes entsprechenden Krümmungskreise bildet; da für jeden Bahnpunkt der Krümmungsradius verschieden groß ist, so ist auch die der Centripetalkraft entsprechende Normal-Acceleration $q = \frac{v^2}{r}$ von veränderlicher Größe.

Die ungleichförmige Bewegung im Kreise vom Radius r (Taf. III, Fig. 37) entsteht, falls sich bezüglich jeder Lage des bewegten Punktes und der dort statt-

findenden Geschwindigkeits-Größe v die genannte Kraft-Resultante in zwei Componenten zerlegen läſst, wovon die erste betreffenden Ortes radial einwärts wirkend die Richtungs-Änderung, also die Normal-Acceleration von der veränderlichen Größe $q = \frac{v^2}{r}$ hervorruft, die zweite aber als Ursache der an dieser Stelle statt findenden Tangential-Beschleunigung p erscheint. In jeder Lage des bewegten Punktes ist also auf letzteren eine Centripetalkraft Q und eine Tangentialkraft P wirksam.

Die ungleichförmige Bewegung in irgend einer krummlinigen Bahn mn (Fig. 37) entsteht, falls bezüglich jeder Lage des bewegten Punktes die genannte Kraft-Resultante den Bedingungen entspricht, welche zur Bewegung des Punktes auf dem betreffenden Ortes zugehörigen Krümmungskreis-Elemente erforderlich sind. Sie muſs sich also in jedem Bahnpunkte in zwei Componenten zerlegen lassen, wovon die eine die zur Richtungs-Änderung nöthige von der Größe der betreffenden Normal-Acceleration abhängende Normalkraft (Centripetalkraft) ist, während die zweite die an dieser Stelle der Tangential-Beschleunigung entsprechende Tangentialkraft bildet.

Da sonach die genannte Resultante rücksichtlich jeder Lage des bewegten Punktes in die Ebene des betreffenden Krümmungskreises fallen muſs, so bleibt sie, falls die Bahn eine ebene Curve ist, ununterbrochen in der Ebene dieser Curve und fällt, bei der Bewegung auf einer Raumcurve, continuierlich in die auf einander folgenden Krümmungs- oder Osculations-Ebenen der letzteren.

Trägheits-Reaction.

Rücksichtlich der auf den Punkt a wirkenden Kräfte erscheinen irgend welche andere materielle Punkte als Kraft-Ausgangspunkte, es muſs also, nach dem Principe der Wechselwirkung, noch eine zweite der genannten Resultante stets entgegengesetzt gerichtete und ihr an Größe gleiche Kraft-Resultante mit dem Ausgangspunkte in a als wirksam vorausgesetzt werden, welche sich als ein infolge der Trägheit (§ 18) entstehender Widerstand gegen eine Änderung des Bewegungs-Zustandes des Punctes a erklären läſst; diese Gegenkraft wird daher im allgemeinen mit dem Namen Trägheits-Widerstand (Trägheits-Reaction) bezeichnet.

Maß der Kräfte.

§ 20. Wirkt auf einen frei beweglichen materiellen Punkt das einemal eine Kraft P entsprechend einer Beschleunigung oder Verzögerung p und das zweitemal eine Kraft P′ entsprechend einer Beschleunigung oder Verzögerung p′, so ist, nach dem früher Erörterten, falls in beiden Fällen gleichartige Geschwindigkeits-Änderungen voraus gesetzt werden,

$$P : P' = p : p' \text{ oder } P = \frac{P'}{p'} p = m p,$$

wobei der Faktor m von der zweiten zur Vergleichung gewählten Kraft P′ und deren Beschleunigung $\pm$ p′ abhängig ist.

Besitzen die materiellen Punkte 1, 2, 3, . . . eines Körpers A in irgend einem Zeitmomente einerlei Bewegungs-Richtung und einerlei Beschleunigung oder

Verzögerung p, so bewegen sie sich in diesem Augenblicke wie frei bewegliche, auf welche parallele Kräfte von den Größen $m_1 p$, $m_2 p$, $m_3 p$ . . . . wirken, also entsprechend einer Kraft-Resultante

$$P = m_1 p + m_2 p + m_3 p + \ldots = p\,(m_1 + m_2 + \ldots .) = M p,$$

wobei der Factor $M = \Sigma\,(m)$ noch zu ermitteln ist. Der Angriffspunkt o dieser Kraft-Resultante ist bekanntlich der Mittelpunkt der Parallel-Kräfte. Da sich die inneren Kräfte des Systems während der Bewegung das Gleichgewicht halten, so ist die Kraft P als Ursache der Beschleunigung p des Körpers A zu betrachten (§ 18).

Constante Kraft, Schwerkraft, Gewicht, Masse.

Ist die Kraft P eine constante in unveränderlicher Richtung wirkende Kraft und soll das Entstehen der Beschleunigung p, trotz vorhandener Ursache hierzu, schon von vornherein verhindert werden, soll sich also der Körper A im Zustande der Ruhe befinden, so muss dieser Kraft, während ihrer Wirkungsdauer durch eine zweite ihr gleich große aber entgegengesetzt gerichtete Kraft, (Kraftresultante), das Gleichgewicht gehalten werden. Als eine solche ebenfalls im obengenannten Punkte o angreifende Gegenkraft von der Größe M p erscheint der Widerstand eines zweiten festen Körpers B, vermittelst welchen der ursprünglich als frei beweglich zu denkende Körper A nun in Ruhe bleibt. Nach dem Principe der Wechselwirkung ist die vom Körper A ausgehende und auf den Körper B wirkende Druck- oder Zug-Kraft diesem Widerstande in derselben Kraftlinie entgegengesetzt gleich, also an Größe und Richtung übereinstimmend mit der Kraft $P = Mp$.

Wirkt auf den Körper A die Schwerkraft, entsprechend der innerhalb gewöhnlicher Fallhöhen constanten Beschleunigung $p = g$, also einer Kraftgröße gleich M p, so ist letztere der Größe des Druckes gleich, welchen dieser Körper infolge der Schwerkraft auf eine feste und fixe horizontale Unterlage ausüben würde, d. i. gleich dem Gewichte G des Körpers. Aus $G = Mg$ folgt rücksichtlich des zu bestimmenden Factors M

$$M = \frac{G}{g} = \frac{\text{Gewicht des Körpers}}{\text{Freifall-Beschleunigung}},$$

diesen Quotienten nennt man die Masse des Körpers.

Ebenso ist auch, falls G das Gewicht eines materiellen Punktes (Kleinkörpers) ist, unter $m = \frac{G}{g}$ die Masse desselben zu verstehen. (Punktmasse.)

Als Maßeinheit des Gewichtes dient bekanntlich das Gewicht von 1 dm^3 reinen Wassers bei 4° C., d. i. ein Kilogramm.

Ist nach bekanntem Gesetze an zwei verschiedenen Orten der Erde die Schwerkraft-Acceleration verschieden groß, so sind, wie oben erörtert, die entsprechenden Kraftgrößen also auch die mit dem Namen Gewichte bezeichneten Drücke G und G' desselben Körpers den Accelerationsgrößen g und g' proportonal.*)

*) Fünf Kilo Eisen wiegen aber in Hammerfest auch fünf Kilo, denn das Verhältnis zwischen dem Drucke von fünf Kilo und einem Kilo auf eine horizontale Unterlage ist unter sonst gleichen Umständen dort dasselbe wie bei uns.

Aus $\frac{G}{g} = \frac{G'}{g'} = M$

folgt, dass die Masse eines und desselben Körpers an allen Orten der Erde die gleiche ist.

Sind m_1 m_2 m_3 . . . . . . die Massen der materiellen Punkte eines festen Systems, also $m_1 g$, $m_2 g$, $m_3 g$ . . . . . deren Gewichte und $G = Mg$ das Gewicht des ganzen Körpers, so ist

$G = Mg = m_1 g + m_2 g + m_3 g + \ldots$ oder $M = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots$

man bezeichnet daher auch die Masse eines Körpers als die Summe der Massen seiner materiellen Theile.

Sind ferner x_1 x_2 x_3 . . . . (Fig. 38) die Abstände dieser Punkte von einer beliebigen Ebene E, so gilt bekanntlich zur Bestimmung des Abstandes x des System-Schwerpunktes von dieser Ebene bezüglich der Kräfte (Gewichte) $m_1 g$, $m_2 g$, $m_3 g$ . . . . . und ihrer Resultante $G = Mg$ der Momenten-Lehrsatz

$Gx = Mgx = m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + m_3 g x_3 + \ldots$ oder $Mx = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \ldots$,

d. i. der Momenten-Lehrsatz rücksichtlich des Schwerpunktes als Massen-Mittelpunktes.

Besitzen die materiellen Punkte desselben Körpers infolge einer anderen constanten Kraft in der Bewegungs-Richtung einerlei Beschleunigung p, bewegt sich also der ganze Körper von der Masse M infolge irgend einer constanten Kraft P geradlinig in der Kraft-Richtung mit der Beschleunigung p, so ist, rücksichtlich des nun bestimmten Faktors M, die Größe dieser Kraft gegeben durch

$$P = Mp = \frac{G}{g} p. \quad \text{(P und G in Kilogramm, p und g in Meter.)}$$

Bedeutet p eine Verzögerung, so ist auch unter $g = 9{\cdot}81\ m$ eine Verzögerung infolge der Schwerkraft zu verstehen, (vertical aufwärts gerichteter Wurf).

Bezüglich des Abstandes x des Mittelpunktes der den Punktmassen m_1 m_2 . . . . . dieses Körpers entsprechenden Parallelkräfte $m_1 p$, $m_2 p$ . . . . . und der Abstände x_1 x_2 . . . der Körperpunkte von irgend einer Ebene E (Fig. 38) gilt bekanntlich ebenfalls der Momenten-Lehrsatz, d. h. es ist das Resultant-Moment

$Px = Mpx = m_1 p_1 x_1 + m_2 p_2 x_2 + \ldots$ oder $Mx = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots$;

da sich letzterer rücksichtlich jeder Ebene geltende Satz auf den Massen-Mittelpunkt bezieht, so hat die Kraft P ihren Angriffspunkt in diesem Punkte.

Veränderliche Kraft.

Besitzen in irgend einem Bewegungs-Zeitmomente sämmtliche materielle Punkte eines Körpers einerlei Bewegungs-Richtung und einerlei Beschleunigung (Verzögerung) p in dieser Richtung infolge dieser Kraft P, so kann letztere als eine während dieses kleinen Zeittheiles constant wirkende Kraft vorausgesetzt werden, sie hat also, jedoch nur rücksichtlich des genannten Zeitmomentes, die Größe $P = Mp = \frac{G}{g} p$, ihr Angriffspunkt ist, wie früher, der Schwerpunkt des Körpers.

Die nach dem Principe der Wechselwirkung im genannten Bewegungs-Zeitmomente bezüglich jedes der materiellen Punkte auftretenden Trägheits-Reactionen

ergeben eine der Kraft P entgegengesetzt gerichtete und ihr an Größe gleiche Kraft-Resultante als resultierenden Trägheits-Widerstand des Körpers mit dem Schwerpunkte als Angriffspunkte.

Beispiel. Welche Größe hat eine Kraft in irgend einem Bewegungs-Zeitmomente, falls durch dieselbe einem Körper von 20 kg. Gewicht eine Beschleunigung von 2 m. in der Kraftrichtung ertheilt wird; diese Beschleunigung besitzen also sämmtliche Punkte des Körpers.

Es ist $$P = Mp = \frac{G}{g} p = \frac{20.2}{9 \cdot 81} = 4 \cdot 08 \text{ kg.}$$

Bestimmung der Kraftgröße auf experimentellem Wege.

In der „Statik" wurden bereits die Principien erörtert, auf welchen die Constructionen der zur Vergleichung der Körper-Gewichte, beziehungsweise der zur „Gewichtsmessung" dienenden Apparate (Wagen etc.) beruhen.

Die Bestimmung der Größe einer Kraft kann in einzelnen Fällen auch unmittelbar auf experimentellem Wege durch Vergleichung mit einer Gewichtswirkung ermittelt werden, so z. B. kann bei einer Torsionsfeder*) die Federkraft, d. i. die einer bestimmten Federung entsprechende Zug- oder Druck-Belastung, unmittelbar durch Anhängen von Maß-Gewichten an die am oberen Ende fixierte oder durch Auflegen derselben auf die am unteren Ende gestützte Feder, bestimmt werden, wobei für die Beibehaltung einer verticalen Richtung der Federaxe zu sorgen ist.

Geradlinig fortschreitende Bewegung eines Körpers. Schwerpunkts-Gesetz.

§ 21. Wirken allgemeinsten Falles auf einen derartig bewegten Körper oder auf eine feste Verbindung von Körpern mehrere verschieden gerichtete in verschiedenen Punkten angreifende äußere Kräfte S, T..., z. B. bei einem beladenen Schlitten, welcher über eine schiefe Ebene hinauf gezogen wird, das Gewicht des Schlittens, die Reibung an der Schlittenbahn und die unter einem Winkel gegen letztere wirkende Zugkraft — so besitzen sämmtliche bewegte materielle Punkte in irgend einem Zeitmomente einerlei Beschleunigung (Verzögerung) p in der Bewegungsrichtung (§ 14), sie bewegen sich also, wie unmittelbar vorher erörtert, ebenso, als ob nur eine Kraft P vorhanden wäre, wirksam in der Bewegungs-Richtung und angreifend im Schwerpunkte des Körpers; besitzt letzterer die Masse M, so ist $P = Mp$.

Die äußeren Kräfte S, T,... müssen im genannten Zeitmomente dasselbe leisten, was die Kraft P geleistet hätte; denkt man daher diese Kräfte S, T,... mittelst Kräftepaare an den Schwerpunkt o des Körpers zu sich parallel verschoben, so muss, da jede Drehung des Körpers ausgeschlossen ist, das Moment des resultierenden Paares gleich Null sein und müssen die in o angreifenden Kräfte eine Resultante geben, welche gleich der Kraft P also von der Größe Mp ist. Letzteres ist aber auch der Fall, falls der Punkt o ein frei beweglicher von der Masse M wäre; somit folgt:

1. Die Kräfte S, T,... lassen sich bezüglich jedes Bewegungs-Zeitmomentes zu einer Resultante P zusammensetzen, deren Richtung die Bewegungsrichtung und deren Angriffspunkt der Schwerpunkt des Körpers ist.

2. Der Schwerpunkt dieses Körpers bewegt sich so, wie ein an seiner Stelle befindlicher frei beweglicher materieller Punkt, dessen

---

*) Erster Theil, § 15.

Masse gleich jener des Körpers ist und auf welchen Kräfte S′, T′,... wirken, die den gegebenen S, T, ... der Richtung und Größe nach gleich sind.

Zerlegt man jede der Kräfte S′, T′... in zwei Componenten, die eine in der Bewegungs-Richtung oder ihr entgegengesetzt, die andere senkrecht zur ersten, so müssen letztere Componenten zusammen (nach Satz 1) die Resultante Null geben und erstere sich im allgemeinen durch eine Kraft-Differenz

$$K - K' = Mp$$

ersetzen lassen. Die Bewegung ist im genannten Zeitmomente
für $K > K'$, eine beschleunigte,
für $K < K'$, eine verzögerte,
für $K = K'$, eine gleichförmige.

Zählt man im ersten Falle, wegen $K = K' + Mp$ die Trägheits-Reaction von der Größe Mp zu den Widerständen und im zweiten Falle, wegen $K' = K + Mp$, die Trägheits-Reaction zu den treibenden Kräften, so ist in allen drei Fällen während der Bewegung die **Summe der treibenden Kräfte gleich jener der Widerstände.**

Gleichmäßig veränderte Bewegung.

Die Beschleunigung (Verzögerung) p ist constant und von der Größe

$$p = \frac{\text{beschleunigende (verzögernde) Kraft } P}{\text{bewegte Masse } M},$$

es kommen also für die Bewegung des Schwerpunktes die bereits (in §§ 4, 5) begründeten Formeln rücksichtlich der Anfangsgeschwindigkeit c, der Endgeschwindigkeit v des Weges s und der Zeit t zur Verwendung.

Beispiele.

1. Ein Körper von 10 *kg* Gewicht soll sich infolge einer constanten in der Bewegungs-Richtung wirkenden Druck-Kraft P (Fig. 39) auf horizontaler vollkommener glatter Bahn vorwärts bewegen. Welche Größe entspricht dieser Kraft und welche Zeit ist nöthig, damit dieser Körper von der Ruhe aus während eines Weges $s = 3\ m$ eine Geschwindigkeit $v = 1\ m$ erlangt. Es ist

$$P = \frac{G}{g}\ p = \frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{2s} = \frac{10.1}{9 \cdot 81.6} = 0 \cdot 17\ kg,$$

$$t = \frac{2s}{v} = 6\ sec.$$

2. Welche Größe hat die in Beispiel 1. genannte Druckkraft, falls die horizontale Unterlags-Fläche nicht vollkommen glatt ist, sondern der Reibungs-Coefficient $\varphi = 0 \cdot 2$ entspricht?

Da hier die Wirkung des Kräftepaares entfällt, mittelst welches der Reibungswiderstand von der Größe φG an den Schwerpunkt o verschoben wird, so folgt

$$P = \varphi G + \frac{G}{g}\ p = 0 \cdot 2.10 + 0 \cdot 17 = 2 \cdot 17\ kg.$$

3. Man beobachtet, dass ein von einer Berglehne herabgleitender Schlitten von 800 *kg* Gewicht nun auf horizontaler Bahn geradlinig ohne einer in der Bewewegungs-Richtung treibenden Kraft noch einen Weg $s = 30\ m$ während der Zeit $t = 15\ sec$ zurücklegt. Wie groß war der als constant vorausgesetzte Reibungs-Widerstand W während des letzteren Weges und wie groß war die Geschwindigkeit v des Schlittens bei dem Beginne der gleichmäßig verzögerten Horizontal-Bewegung.

Es ist bezüglich der Verzögerung p

$$W = \frac{G}{g}\ p = \frac{G}{g} \cdot \frac{2s}{t^2} = \frac{800.2.30}{9 \cdot 81.225} = 21 \cdot 7\ kg,$$

$$v = \frac{2s}{t} = \frac{60}{15} = 4\ m.$$

4. Mit welcher Beschleunigung p bewegt sich der in Fig. 43 dargestellte Körper vom Gewichte $G = 10\ kg$ auf horizontaler Bahn, falls rücksichtlich letzterer der Reibungscoefficient $\varphi = 0{\cdot}2\ kg$ beträgt und das Zug-Gewicht $P = 3\ kg$ mittelst vollkommen biegsamer Schnur in angegebener Art mit dem Körper verbunden ist, sonstige Bewegungs-Hindernisse sollen unberücksichtigt bleiben.

$$\text{Die beschleunigende Kraft ist} = P - \varphi G,$$

$$\text{die bewegte Masse ist} = \frac{G}{g} + \frac{P}{g},$$

$$\text{folglich ist } p = \frac{(P - \varphi G)\, g}{P + G} = 0{\cdot}755\ m.$$

5. Eine vollkommen biegsame Schnur ist über eine feste Rolle gelegt (Fig. 40) und trägt an ihren Enden die Gewichte $P > Q$, wie groß ist die Beschleunigung, beziehungsweise Verzögerung, rücksichtlich der Bewegung dieser Gewichte, und wie groß sind die beiden Schnur-Spannungen? Falls die sonstigen auf die Bewegung Einfluss habenden Umstände unberücksichtigt bleiben können, so ist

$$\text{die beschleunigende Kraft} = P - Q,$$

$$\text{die bewegte Masse} = \frac{P}{g} + \frac{Q}{g},$$

$$\text{also folgt } p = \frac{(P - Q)\, g}{P + Q}.$$

Da durch das Gewicht P sowohl die Schnur-Spannung S (Fig. 40) hervorgerufen wird als auch die Gewichtsmasse $\frac{P}{g}$ die Beschleunigung p erlangt, so ist

$$P = S + \frac{P}{g}\, p, \text{ mithin ist } S = P\left(1 - \frac{p}{g}\right).$$

Rücksichtlich der Spannung S' ist p negativ zu nehmen, also ist

$$S' = Q\left(1 + \frac{p}{g}\right).$$

6. Wie bestimmt man in Beispiel 5. unter den dort gemachten Voraussetzungen das Gewichts-Verhältnis $\frac{P}{Q}$, falls die Beschleunigung $p = 0{\cdot}1\ m$ sein soll.

7. Mit welcher Beschleunigung bewegt sich der in Fig. 41 dargestellte Körper vom Gewichte G auf der schiefen Ebene aufwärts, falls die Neigung α, der Reibungs-Coefficient φ, und das Zug-Gewicht P gegeben sind, und welche Zeit benöthigt er hierzu rücksichtlich des gleichfalls gegebenen Weges s.

Bleiben sonstige auf die Bewegung Einfluss habende Umstände unberücksichtigt und bestimmt man in der (Fig. 41) angegebenen Art die beiden Gewichts-Componenten $G \sin \alpha$ und $G \cos \alpha$, so ist der

$$\text{Reibungs-Widerstand} = \varphi\, G \cos \alpha,$$

$$\text{die beschleunigende Kraft} = P - (G \sin \alpha + \varphi\, G \cos \alpha),$$

$$\text{die bewegte Masse} = \frac{P + G}{g},$$

$$\text{die Beschleunigung } p = \frac{(P - G \sin \alpha - \varphi\, G \cos \alpha)\, g}{P + G}.$$

$$\text{Aus } s = \frac{p\, t^2}{2} \text{ ist } t = \sqrt{\frac{2s}{p}}.$$

8. Ein 2000 *kg* schwerer Wagen legt während 2 Minuten einen Weg von 180 *m*, gleichförmig bewegt, zurück. Wie groß muss die (zusätzliche) Zug- oder Druckkraft sein, damit er in der nächsten Minute, unter übrigens gleich bleibenden Umständen, den Weg $s = 360\ m$ gleichmäßig beschleunigt zurücklegt.

$$\text{Die Anfangs-Geschwindigkeit der beschleunigten Bewegung ist } c = \frac{180}{120} = 1{\cdot}5\ m,$$

$$\text{die End-Geschwindigkeit derselben ist } v = \frac{2s}{t} - c = \frac{2 \cdot 360}{60} - 1{\cdot}5 = 10{\cdot}5\ m,$$

also ist die Beschleunigung $p = \frac{v - c}{t} = \frac{10{\cdot}5 - 1{\cdot}5}{60} = 0{\cdot}15\ m.$

Die Kraft $P = \frac{G}{g}\,p = \frac{2000.0{\cdot}15}{9{\cdot}81} = 30{\cdot}5\ kg.$

Gleiten über die schiefe Ebene infolge der Schwerkraft.

§ 22. Ist das Gewicht G des Körpers und die Neigung α sowie die Höhe h der schiefen Ebene gegeben und bestimmt man (nach Fig. 44) die beiden Gewichts-Componenten $G \sin\alpha$ und $G \cos\alpha$, so ist ohne Rücksicht auf den Reibungs-Widerstand bezüglich der Bewegung des Körper-Schwerpunktes die Beschleunigung

$$p = \frac{\text{beschleunigende Kraft}}{\text{bewegte Masse}} = G \sin\alpha : \frac{G}{g} = g \sin\alpha.$$

Diese Beschleunigung ist also constant und mithin ergibt sich rücksichtlich des Weges s, aus $s = \frac{v^2}{2p}$, die Endgeschwindigkeit $v = \sqrt{2ps} = \sqrt{2g \sin\alpha \, \frac{h}{\sin\alpha}} = \sqrt{2gh}$, d. h. diese Endgeschwindigkeit ist eben so groß als jene, falls der Körper durch die Höhe h frei fallen würde.

Die Zeit t zur Zurücklegung des Weges s bestimmt man aus

$$s = \frac{pt^2}{2}, \text{ u. zw. ist } t = \sqrt{\frac{2s}{p}} = \sqrt{\frac{2s}{g \sin\alpha}}.$$

Construiert man über die Länge s als Sehne einen Halbkreis (Fig. 45), dessen Durchmesser d in die Linie der Höhe h fällt, so ist, wegen $s = d \sin\alpha$, die genannte Zeit auch bestimmt durch

$$t = \sqrt{\frac{2d \sin\alpha}{g \sin\alpha}} = \sqrt{\frac{2d}{g}},$$

d. h. diese Zeit ist auch, unabhängig von der Neigung α der schiefen Ebene, gleich jener, welche der Körper beim freien Falle, entsprechend einer Fallhöhe gleich der Länge des Durchmessers d, benöthigen würde. Es ist also für das Gleiten des Körpers über jede der schiefen Ebenen, welche durch die vom Punkte a aus gezogenen Sehnen bestimmt sind, dieselbe Zeit $t = \sqrt{\frac{2d}{g}}$ erforderlich.

Ist die horizontale Basis der schiefen Ebene durch die Länge l gegeben, so ist die genannte Bewegungszeit

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g \sin\alpha}} = \sqrt{\frac{2l}{g \sin\alpha \cos\alpha}} = \sqrt{\frac{4l}{g \sin 2\alpha}};$$

diese Zeit wird am kleinsten für $\sin 2\alpha = 1$, also $\sphericalangle \alpha = 45^\circ$. So z. B. fließt, unter übrigens gleichen Umständen, von einem Dache, mit der Neigung gleich 45° gegen die Horizontalebene, das Wasser in kürzester Zeit ab.

Soll beim Gleiten des Körpers über die schiefe Ebene auch die Reibung (Coefficient φ) mit berücksichtigt werden, so ist (nach Fig. 44) durch die Gewichts-Componente $G \cos\alpha$ der Normaldruck also durch $\varphi G \cos\alpha$ die Größe des Reibungs-Widerstandes gegeben. In diesem Falle ist also

die beschleunigende Kraft $= G \sin\alpha - \varphi G \cos\alpha$,

die Beschleunigung $p = \frac{(G \sin\alpha - \varphi G \cos\alpha)\, g}{G} = (\sin\alpha - \varphi \cos\alpha)\, g.$

Die Bestimmung der Endgeschwindigkeit v und der Zeit t betreffs der Bewegung während des Weges s erfolgt, da hier ebenfalls die Beschleunigung constant ist, nach den angegebenen Formeln

$$v = \sqrt{2ps}, \quad t = \sqrt{\frac{2s}{p}}.$$

Centripetal- und Centrifugalkraft des materiellen Punktes.

Krummlinige Bewegung im allgemeinen.

§ 23. Rücksichtlich des allgemeinen Falles dieser Bewegung wurde in § 19 erörtert, dass sich für jede Lage des frei beweglichen materiellen Punktes die Resultante der äußeren Kräfte durch zwei Componenten ersetzen läſst, wovon die eine die Normal- oder Centripetalkraft Q, die zweite die Tangentialkraft P ist. Wird bezüglich irgend einer Lage des bewegten Punktes, z. B. jener in a (Fig. 37), der Krümmungsradius mit r, die Tangential-Beschleunigung mit p und die Geschwindigkeit mit v bezeichnet, so ist die Normal-Acceleration $q = \frac{v^2}{r}$. Für die Punktmasse gleich m ist also die Centripetalkraft $Q = mq = \frac{mv^2}{r}$, die Tangentialkraft $P = mp$.

Der für die genannte Lage resultierende Trägheits-Widerstand (§ 19) des materiellen Punktes muſs sich, da er vom Punkte a ausgehend entgegengesetzt gleich der genannten Resultante ist, ebenfalls in zwei Componenten Q′ und P′ zerlegen lassen, wovon die erste Q′ entgegengesetzt gleich der Centripetalkraft Q und die zweite P′ entgegengesetzt gleich der Tangentialkraft P ist.

Die Kraft Q′ ist also eine vom frei beweglichen Punkte ausgehende continuierlich normal- oder beziehungsweise radial-auswärts wirkende Kraft, mit welcher dieser materielle Punkt einer Änderung seiner Bewegungsrichtung infolge seiner „Trägheit“ widersteht, sie wird Normal-Reaction oder Centrifugalkraft genannt und hat die Größe $Q' = Q = \frac{mv^2}{r}$.

Die Kraft P′ ist der continuierlich während der Bewegung vom genannten Punkte infolge seiner Trägheit ausgehende Widerstand gegen eine Geschwindigkeits-Änderung in tangentialer Richtung, sie wird Tangential-Reaction genannt und hat die Größe $P' = P = mp$.

Bewegt sich der Punkt gleichförmig auf ebener krummliniger Bahn, ist also ununterbrochen die Kraft P und mithin auch jene P′ gleich Null, so muſs die Centripetalkraft unmittelbar die Resultante der äußeren auf den frei beweglichen Punkt wirksamen Kräfte sein, also sind in diesem Falle diese äußeren Kräfte mit der Centrifugalkraft im Gleichgewichte.

Ist der materielle Punkt (Kleinkörper) nicht frei beweglich, sondern genöthigt bei seiner Bewegung auf einer als vollkommen glatt vorausgesetzten Fläche (Bahnfläche, z. B. Schienenfläche, Rohrwand ꝛc.) eines zweiten fixen und festen Körpers A (Fig. 46) zu bleiben, so kommt zu der auf diesen Punkt wirkenden äußeren Kraft (Kraft-Resultante) K, infolge der Wechselwirkung zwischen dem materiellen Punkte und dem Bahnkörper, noch eine zweite Kraft, nämlich der in jedem Bahnpunkte normal zur Bahnfläche also auch normal zur Bewegungsrichtung wirksame Widerstand W seitens des Bahnkörpers hinzu. Es wird also die zwangsläufige Bewegung dieses Punktes auf jene eines frei beweglichen und mithin der vorliegende Fall auf den unmittelbar vorhergehenden zurückgeführt, sobald die Resultante der Kräfte K und W an die Stelle der früher genannten Kraft-Resultante tritt. Kann die Bahnfläche nicht als vollkommen glatt vorausgesetzt werden,

so ist bei der Bestimmung der Tangentialkraft auch auf den in tangentialer Richtung auftretenden Reibungs-Widerstand Rücksicht zu nehmen.

Stellt in Fig. 46 und Fig. 47 die Zeichnungsfläche die Ebene des der Lage a des bewegten Punktes entsprechenden Krümmungskreises vom Radius r vor, so liegt in dieser Ebene auch die Kraft K sowie der Widerstand W, wobei letzterer entweder gegen den Krümmungs-Mittelpunkt, also radial-einwärts (Fig. 46), oder entgegengesetzt, d. i. radial-auswärts (Fig. 47), gerichtet ist, je nachdem sich der Punkt auf der concaven oder convexen Krümmung bewegt. In beiden Fällen müssen sich die Kräfte K und W ersetzen lassen durch die radial-einwärts wirkende Centripetalkraft Q und durch die Tangentialkraft P. Zerlegt man daher die Kraft K in die beiden zu einander senkrechten Componenten t und n, wovon jene t in die Tangentenrichtung bei a fällt, so ist rücksichtlich der Punktmasse m und der dieser Punktlage entsprechenden Geschwindigkeit v

$$\text{betreffs des Falles Fig. 46} \ldots Q = W - n = \frac{m v^2}{r},$$

$$\text{betreffs des Falles Fig. 47} \ldots Q = n - W = \frac{m v^2}{r}.$$

Für die in Fig. 46 punktierte Lage der Kraft K wäre $Q = W + n$, also wäre eine Bewegung auf der Bahn nur so lange möglich, als der Widerstand $W = Q - n$ positiv mithin $\frac{m v^2}{r} > n$ ist. In beiden Fällen ist die Tangentialkraft $P = t = m p$. Da der Normaldruck des Kleinkörpers a auf die Bahn entgegengesetzt gleich dem Widerstande W ist, so ist, falls auch die Gleit-Reibung (Coefficient $= \varphi$) berücksichtiget wird, die Tangentialkraft $P = t - \varphi W = m p$. Die Centrifugalkraft und die Tangential-Reaction des bewegten Punktes sind an Größe beziehungsweise gleich den Kräften Q und P.

Kreis-Bewegung.

§ 24. Bewegt sich der materielle Punkt im Kreise vom Radius r, so ergibt sich, dass die Größe $\frac{m v^2}{r}$ der Centripetal- und der Centrifugalkraft bei gleichförmiger Bewegung constant, bei ungleichförmiger variabel ist.

Befindet sich z. B. eine kleine Kugel a (Fig. 49) auf einer Horizontal-Ebene mittelst eines undehnbaren Fadens von der Länge r in fixer Verbindung mit einem Drehpunkte (Dreh-Axe) o und erhält sie auf irgend eine Art senkrecht zur Faden-Richtung eine Anfangs-Geschwindigkeit v, so beschreibt sie, falls keine Widerstände auftreten, einen Kreis vom Radius r bei gleichförmiger Bewegung. Der infolge genannter fixer Verbindung mittelst des Fadens in der Richtung a gegen o wirksamen Centripetalkraft von der Größe $\frac{m v^2}{r}$ wirkt in gleicher Größe die Centrifugalkraft k radial-auswärts entgegen, durch letztere wird also dieser Faden auf Zug-Elasticität oder Zug-Festigkeit beansprucht, u. zw. ist, bei einem Kugelgewichte $G = 0 \cdot 2$ *kg* und einer Geschwindigkeit $v = 2$ *m*, für $r = 0 \cdot 5$ *m*

$$k = \frac{m v^2}{r} = \frac{G}{g} \frac{v^2}{r} = \frac{0 \cdot 2.4}{9 \cdot 81.0 \cdot 5} = 0 \cdot 163 \textit{ kg}.$$

Würde der Faden durchschnitten, also der Zwang zur Richtungs-Änderung beseitigt, so würde auch die Centripetal- und Centrifugalkraft verschwinden und die Kugel müsste sich in der betreffs dieses Zeitmomentes erlangten tangentialen Richtung mit der Geschwindigkeit v gleichförmig weiter bewegen, falls keine Bewegungs-Hindernisse vorhanden wären.

Ist ein materieller Punkt (Fig. 50) vom Gewichte $m g$ infolge einer fixen Führung gezwungen, sich auf einer festen Unterlage A im Horizontal-Kreise vom Radius r gleichförmig mit der Geschwindigkeit v zu bewegen und verlangt man, dass die Bewegung dieses Kleinkörpers wie jene eines frei beweglichen materiellen Punktes vor sich gehe, so muss rücksichtlich jeder seiner Lagen, z. B. jener in a, die horizontal und radial-einwärts gerichtete Centripetalkraft $Q = \frac{m v^2}{r}$ die Resultante aus dem Gewichte $m g$ und dem bei a normal zur Bahnfläche gerichteten Widerstande W seitens des Bahnkörpers sein, wobei diese drei Kräfte in einer Vertical-Ebene liegen und die auf einander folgenden Lagen dieser Ebene eine verticale das Kreiscentrum o enthaltende Axe oX gemein haben. Die Richtung und Größe des Widerstandes W sind, falls dessen Neigung gegen die Horizontal-Ebene mit α bezeichnet wird, bestimmt durch

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{m g}{Q} = \frac{g r}{v^2}, \text{ ferner ist } W^2 = Q^2 + (m g)^2.$$

Es ist also die Bahnfläche als Kreiskegelfläche zu construieren, deren Axe die eben genannte Axe oX ist und deren Erzeugende mit letzterer den Winkel α bilden. So z. B. soll auf einer derartigen Fläche der äußere und innere Schienenstrang einer Eisenbahn liegen, falls die Mittellinie zwischen beiden Strängen ein Horizontal-Kreisbogen ist und verlangt wird, dass die Radflanschen der Wägen weder nach außen noch nach innen einen Seitendruck auf die Schienen ausüben sollen.

Beispiel.

Wenn bei einem horizontalen Eisenbahnbogen der Radius 600 *m* beträgt, wie groß ist der Winkel, um welchen die Schwellen, rücksichtlich der eben erörterten Bedingung, gegen den Horizont geneigt werden müssen, falls eine Fahr-Geschwindigkeit von 16 *m* in Rechnung gezogen wird.

Dieser Winkel β ist gleich $90 - \alpha$, $\operatorname{cotg} \beta = \frac{g r}{v^2} = \frac{9 \cdot 81 . 600}{16^2} = 23$

$\sphericalangle \beta = 2^\circ 30'$.

Zusammensetzung der Centrifugalkräfte eines rotierenden Systems materieller Punkte.

§ 25. Rotiert ein fester Körper um eine Axe und besitzt derselbe in irgend einem Bewegungs-Zeitmomente die Winkel-Geschwindigkeit ω, so ist es in einzelnen Fällen möglich die rücksichtlich seiner materiellen Punkte auftretenden Centrifugalkräfte durch eine Einzelnkraft zu ersetzen, welche als Centrifugalkraft dieses Körpers bezeichnet wird. Ist m die Masse, v die Umfangs-Geschwindigkeit betreffs dieses Zeitmomentes, und r der Abstand eines der genannten Punkte von der Drehaxe, so ist dessen Centrifugalkraft k, wegen $v = r\omega$, $k = \frac{m v^2}{r} = m \omega^2 r$.

Rotierende Platte.

Rotiert die sehr dünne Platte A (Fig. 51), deren Schwerpunkt s ist, um die zu ihr normale Axe oZ und bezieht man die materiellen Punkte derselben auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem oXY, wobei der Abstand ρ des Schwerpunktes s von der Rotations-Axe in der Axe oX liegt, so ist durch die Coordinaten $x_1 y_1$

ein im Abstande r_1 von der Axe oZ befindlicher Punkt a_1 bestimmt; verschiebt man dessen Centrifugalkraft k_1 in ihrer Kraftlinie an den Punkt o und zerlegt sie dann in die beiden Componenten q_1 auf oX und p_1 auf oY, so folgt, rücksichtlich der Masse m_1 dieses Punktes,

aus $q_1 : x_1 = k_1 : r_1$, $q_1 = \frac{x_1 k_1}{r_1} = \frac{x_1 m_1 \omega^2 r_1}{r_1} = x_1 m_1 \omega^2$,

aus $p_1 : y_1 = k_1 : r_1$ ergibt sich ebenso .... $p_1 = y_1 m_1 \omega^2$.

In gleicher Art bestimmt man bezüglich eines zweiten Punktes a_2 die Kräfte $q_2 = x_2 m_2 \omega^2$, $p_2 = y_2 m_2 \omega^2$ u. s. w.

Es resultiert eine auf oX liegende Kraft

$$Q = q_1 + q_2 + \ldots = (x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots)\,\omega^2,$$

und eine auf oY liegende Kraft

$$P = p_1 = p_2 + \ldots = (y_1 m_1 + y_2 m_2 + \ldots)\,\omega^2.$$

Bezeichnet man die Masse der Platte mit M, so ist nach dem bekannten Schwerpunkts-Momenten-Lehrsatze

betreffs der Ebene YoZ, $m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots = M\varrho$ also ist $Q = M\omega^2 \varrho$,
betreffs der Ebene XoZ, $m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots = M.0 = 0$, also ist $P =$ Null.

Die Centrifugalkräfte der materiellen Punkte dieser Platte lassen sich also durch eine *Einzelnkraft* $Q = M\omega^2\varrho$ ersetzen, u. z. *durch die Centrifugalkraft eines an der Stelle des Schwerpunktes der Platte statt letzterer befindlichen materiellen Punktes, dessen Masse gleich jener der Platten-Masse* ist.

Rotierender Körper, besonderer Fall.

Besitzt ein Körper eine geometrische Axe uv (Fig. 52) von der Eigenschaft, dass sie die Schwerpunkte sämmtlicher zu ihr normaler Körper-Querschnitte enthält, und rotiert er um eine zweite zu dieser Axe uv im Abstande ϱ parallele Axe oz, wie dieses z. B. bei dem in (Fig. 53) dargestellten halben Kreisring-Cylinder der Fall ist, so kann man sich diesen Körper in dünne Platten von den Massen $m_1\, m_2\, m_3$ .... zerlegt denken, welchen die in der Ebene der beiden Axen liegenden Centrifugalkräfte $k_1 = m_1 \omega^2 \varrho_1$ u. s. w. entsprechen. Es resultiert eine *Einzelnkraft* (*Körper-Centrifugalkraft*)

$$Q = k_1 + k_2 + \ldots = (m_1 + m_2 + \ldots)\,\omega^2\varrho = M\omega^2\varrho,$$

falls mit M die Masse des rotierenden Körpers bezeichnet wird.

Zur Bestimmung des Angriffspunktes s dieser Kraft bezeichne man mit x den Abstand dieses Punktes und mit $x_1\, x_2$ .... die Abstände der Platten-Schwerpunkte von irgend einer jedoch nicht durch beide Axen gehenden Ebene, z. B. jener E, so ist nach dem bekannten Momenten-Lehrsatze rücksichtlich der gegebenen parallelen Kräfte und ihrer Resultante Q,

$Qx = k_1 x_1 + k_2 x_2 \ldots$ oder $M\omega^2\varrho . x = m_1 \omega^2 \varrho_1 x_1 + m_2\omega^2\varrho_2 . x_2 + \ldots$

also ist $$Mx = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots;$$

da diese rücksichtlich jeder Ebene geltende Relation nur dem Schwerpunkte des Körpers entspricht (§. 20), so folgt: Die Centrifugalkräfte der materiellen Punkte dieses Körpers lassen sich ersetzen durch die *Centrifugalkraft eines an Stelle des Schwerpunktes des Körpers statt letzterem befindlichen materiellen Punktes, dessen Masse gleich jener der Körpermasse ist.*

Zu diesen Körpern gehört u. a. jeder Umdrehungskörper, welcher um eine zu seiner geometrischen Axe im Abstande ϱ parallele Axe rotiert, also speciell auch eine Kugel, welche um irgend eine Axe rotiert.

Rotierender Körper, allgemeiner Fall, freie Axe.

§ 26. Im Allgemeinen ist für einen beliebigen mit der Winkel-Geschwindigkeit ω rotierenden Körper die Ersetzung der Centrifugalkräfte seiner materiellen Punkte durch eine Einzelnkraft nicht möglich.

Denkt man einen solchen Körper von der Masse M (Fig. 54) durch Schnitte senkrecht zur Rotations-Axe oZ in dünne Platten zerlegt, rücksichtlich dieser Platten von den Massen $m_1 m_2$ . . . die Centrifugalkräfte $k_1 k_2$ . . . bestimmt, wobei letztere in die Richtungen der Abstände $\varrho_1 \varrho_2$ . . . . der Platten-Schwerpunkte von der Rotations-Axe fallen, und durch den Schwerpunkt s des Körpers ebenfalls eine Ebene XoY senkrecht zur oZ gelegt, welche diese Axe im Punkte o trifft, so kann die erste im Platten-Schwerpunkte s_1 angreifende Kraft $k_1 = m_1 \omega^2 \varrho_1$ zunächst in ihrer Linie an den Axenpunkt o_1 und dann parallel zu sich mittelst des Kräftepaares $(k_1, -k_1)$ an den Axenpunkt o verschoben werden; geschieht dasselbe auch rücksichtlich der zweiten Kraft $k_2 = m_2 \omega^2 \varrho_2$ und dritten Kraft k_3 u. s. w., so können nun die in o angreifenden Kräfte von den Größen $k'_1 = m_1 \omega^2 \varrho_1$, $k'_2 = m_2 \omega^2 \varrho_2$ . . ., in derselben Art vereinigt und durch eine dem Abstande ϱ des Körperschwerpunktes s von der Axe oZ entsprechende Einzelnkraft $Q = M \omega^2 \varrho$ ersetzt werden, wie dieses bei der rotierenden Platte gezeigt wurde.

$x_1 y_1$ Coordinaten von s_1, k_1' zerlegt in $q_1 = x_1 m_1 \omega^2$ auf oX und $p_1 = y_1 m_1 \omega^2$ auf oY u. s. w. Bei Anwendung des Schwerpunkts-Lehrsatzes auf die Größen $Q = (x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots .) \omega^2$ und $P = (y_1 m_1 + y_2 m_2 + \ldots .) \omega^2$ ist zu beobachten, dass $m_1 m_2$ .... die Massen der Platten und $s_1 s_2$ ..... die Schwerpunkte der letzteren sind.

Da die Ebene jedes der genannten Kräftepaare $(k_1, -k_1)$ u. s. w. durch die Axe oZ geht, so ergibt sich durch Zusammensetzung dieser Paare ein resultierendes Kräftepaar $(K, -K)$ vom Momente M, dessen Ebene ebenfalls die Rotations-Axe enthält.

Die Wirkungen der Einzelnkraft Q und dieses Kräftepaares $(K, -K)$ werden aufgehoben durch Gegenkräfte (Lagerdrücke, Elasticitäts-Widerstände 2c.), vermöge welcher die Rotations-Axe in unveränderlicher Lage erhalten wird.

Unter einer freien Axe versteht man diejenige, auf welche infolge der besprochenen Centrifugalkraft-Wirkung des um dieselbe rotierenden Körpers keine Kräfte wirksam werden. In diesem Falle muss also

sowohl die Kraft Q gleich Null als auch das Kräftepaar-Moment M gleich Null sein.

Der ersten Bedingung $Q = M \omega^2 \varrho = 0$ kann nur für ϱ = Null entsprochen werden, jede derartige Axe muss also durch den Schwerpunkt des Körpers gehen. Beiden Bedingungen zugleich wird u. a. dadurch entsprochen, dass die Rotationsaxe durch die Schwerpunkte sämmtlicher zur Rotationsaxe senkrechter Körper-Querschnitte geht; es ist also die Linie, welche die Schwerpunke der beiden Grundflächen eines homogenen geraden Prisma verbindet, als Rotationsaxe eine freie Axe, desgleichen die geometrische Axe eines homogenen Umdrehungs-Körpers u. s. w.

Ist die freie Axe eines Körpers als materielle Drehaxe an zwei oder mehreren Stellen gelagert, so wird nur in so lange, als sich die äußeren Kräfte das Gleichgewicht halten, d. h. nur bei gleichfömiger Rotation, kein Lagerdruck infolge der Centrifugalkraft-Wirkung stattfinden.

Anwendung.

Kann ein homogener Körper durch eine seine geometrische Axe (zugleich Rotations-Axe) enthaltende Ebene derart gehälftet werden, dass für jede der beiden congruenten Hälften in früher erörterter Weise eine im Schwerpunkte dieser Hälfte angreifende zur Axe normale Einzelnkraft als Körper-Centrifugalkraft bestimmt werden kann, wie dieses z. B. bei einem geraden Kreiscylinder oder Kreisring-Cylinder etc. der Fall ist, so wirken die beiden Centrifugalkräfte, deren jede die Größe $Q = M\omega^2\varrho$ besitzt, in derselben Kraftlinie senkrecht zur genannten Ebene nach entgegengesetzten Richtungen und es herrscht infolge dessen im genannten Axen-Querschnitte von der Fläche F eine als constant vorausgesetzte specifische Zugspannung S, mithin ist $Q = M\omega^2\varrho = FS$.

Beispiel.

Welche Umfangsgeschwindigkeit v im Kreise vom mittleren Radius R darf höchstens ein gusseisener cylindrischer Schwungring von geringer radialer Breite δ (Fig. 53) erhalten, damit die infolge der Centrifugalkraft-Wirkung in einem Axial-Querschnitte von der axialen Dimension h auftretende specifische Zug-Spannung S die Größe von 2 *kg* pro 1 □*mm* nicht überschreitet; die Dichte des Materiales ist $s = 7{\cdot}2$.

Mit Berücksichtigung der geringen radialen Dimension δ und des Umstandes, dass die Schwerpunkte der Ring-Elemente auf einem Kreise vom Radius R liegen, ist der Abstand ϱ des Halbring-Schwerpunktes s von der Rotations-Axe o z und weiters die Kraft P bestimmt durch

$$\varrho = \frac{2R}{\pi}, \qquad Q = M\omega^2\varrho = \frac{G}{g}\omega^2 . \frac{2R}{\pi} = FS.$$

Wird die Wassergewichts-Einheit mit γ bezeichnet, so ist $G = R\pi\delta h s\gamma$, die Fläche $F = 2\delta h$; es folgt

$$\frac{2\delta h s\gamma\, R^2\omega^2}{g} = 2\delta h S \text{ oder für } R\omega = v,\ v = \sqrt{\frac{gS}{s\gamma}}.$$

Für $S = 2$ *kg* pro 1 □*mm*, $g = 9810$ *mm*, $s = 7{\cdot}2$, $\gamma = 0{\cdot}000001$ ist $v = 52{\cdot}2$ *m*.

Das Centrifugal-Pendel.

§ 27. Dieses besteht aus einer Kugel vom Gewichte G und einer dünnen als materielle Linie zu betrachtenden bei o (Fig. 48) drehbar an eine verticale Welle angebolzten Stange von der Länge l. Rotiert die Kugel gleichförmig mit einer Winkel-Geschwindigkeit ω, so muss deren Centrifugalkraft K mit dem im Kugelcentrum a vereinten Gewichte G und dem in der Richtung $a o$ auftretenden Zug-Elasticitäts-Widerstande im Gleichgewichte sein, falls die Centrifugalkraft der rotierenden Stange unberücksichtigt bleibt. Sonach fällt die Resultante von K und G in die Stangenrichtung und es ist nach dem Satze der statischen Momente rücksichtlich des Momentenpunktes o für den Pendelausschlag-Winkel α, $G l \sin\alpha = K l \cos\alpha$.

Die im Schwerpunkte a der Kugel angreifende Centrifugalkraft ist (nach § 25) $K = m\omega^2 r = \frac{G}{g}\omega^2 l \sin\alpha$. Durch Substitution dieses Wertes ergibt sich

$$G l \sin\alpha = \frac{G}{g}\omega^2 l \sin\alpha\, l \cos\alpha \text{ oder } \omega^2 = \frac{g}{l\cos\alpha}.$$

Rotiert die Kugel gleichförmig mit n Touren pro Minute,

$$\text{so ist } n = \frac{60\,\omega}{2\,\pi} = \frac{60\sqrt{g}}{2\,\pi}\sqrt{\frac{1}{l\cos\alpha}},$$

nimmt man die Längen in Millimeter, so ist, für $g = 9810$,

$$n = 946\sqrt{\frac{1}{l\cos\alpha}}.$$

Aus dieser Relation folgt, dass bei einer Vergrößerung der Tourenzahl n der $\cos\alpha$ kleiner und mithin der $\sphericalangle\,\alpha$ größer werden müsse, d. h. das Kugelmittel a steigt im Verticalkreise vom Radius l. Auf dieser Eigenschaft beruht die Construction des Watt'schen Centrifugal-Regulators, bei welchem, damit die Rotations-Axe eine freie Axe werde, zwei derartige Pendel symmetrisch zu dieser Axe angeordnet sind.

Krummlinig fortschreitende Bewegung eines Körpers, Schwerpunkts-Gesetz.

§ 28. Da sämmtliche Körperpunkte in irgend einem Bewegungs-Zeitmomente einerlei Tangential-Beschleunigung p und einerlei Normal-Acceleration $q = \frac{v^2}{r}$ besitzen, (§. 14), so bewegen sie sich in diesem Zeitmomente so, als ob eine im Schwerpunkte o des Körpers von der Masse M angreifende Tangentialkraft $P = Mp$ und eine ebenfalls dort angreifende Normalkraft $Q = Mq$ vorhanden wäre, (§ 20).

Wirken also allgemeinsten Falles auf einen derartig bewegten Körper mehrere verschieden gerichtete und in beliebigen Punkten angreifende Kräfte S, T . . . ., so müssen diese im genannten Zeitmomente dasselbe leisten, was die Kräfte P und Q geleistet hätten. Denkt man daher die Kräfte S, T . . . mittelst Kräftepaare an den Schwerpunkt des Körpers als neuen Angriffspunkt verschoben, so muss, da jede Drehung des Körpers ausgeschlossen ist, das Moment des resultiernden Kräftepaares gleich Null sein und müssen die verschobenen Kräfte eine Resultante R geben, gleich jener der Kräfte P und Q. Da aber bei der krummlinigen Bewegung eines frei beweglichen materiellen Punktes die Resultante R der äußeren Kräfte sich ebenfalls in eine Tangentialkraft $P = Mp$ und Normalkraft $Q = Mq$ zerlegen läßt, so folgt:

1. Die Kräfte S T . . . . lassen sich bezüglich jedes Bewegungs-Zeitmomentes zu einer im Körper-Schwerpunkte o angreifenden Resultante R zusammensetzen. Diese ist gleich der Resultante einer Tangentialkraft $P = Mp$ und Normalkraft $Q = Mq$, beide Kräfte wirksam im Punkte o.

2. Der Schwerpunkt o dieses Körpers bewegt sich so, wie ein an seiner Stelle befindlicher frei beweglicher materieller Punkt, dessen Masse gleich jener des Körpers ist und auf welchen Kräfte wirken, die den gegebenen S, T . . . . der Richtung und Größe nach gleich sind.

Beispiel.

Stellt x y (Fig. 28) die Schnittlinie einer fixen Gleitfläche mit einer Vertical-Ebene vor und kann vorausgesetzt werden, dass sich sämmtliche Punkte des Körpers A infolge seines Gewichtes G in zu x y congruenten Parallelcurven bewegen, wobei der Bewegung des Schwerpunktes o in irgend einer seiner Lagen der Bahn-Krümmungsradius r, die Geschwindigkeit v, die Tangentialbeschleunigung p und die Normal-Acceleration $q = \frac{v^2}{r}$ entspricht, so

sind zunächst das Körpergewicht G, der stets normal zur Bahnfläche gerichtete Widerstand W seitens des festen Bahnkörpers und die entgegengesetzt der Bewegungs-Richtung auftretende Gleit-Reibung von der Größe φW (φ Reibungs-Coefficient) als Kräfte wirksam. Wird, nach Fig. 28, das Gewicht G zerlegt in die Componenten $G \sin \alpha$ und $G \cos \alpha$, so ist, für $M = \frac{G}{g}$,

die Tangentialkraft $P = G \sin \alpha - \varphi W = M p$

die Normalkraft $Q = W - G \cos \alpha = M \frac{v^2}{r}$

falls wirklich jede Drehung des Körpers ausgeschlossen ist.

Zählt man die Tangential-Reaction von der Größe $M p$ zu den Widerständen, so ist, wegen $G \sin \alpha = M p + \varphi W$, in tangentialer Richtung die treibende Kraft gleich der Summe der Widerstände.

Zählt man die Normal-Reaction von der Größe $M q$, wegen $G \cos \alpha + M q = W$, zu den normal auswärts, also in centrifugaler Richtung treibenden Kräften, so ist auch in dieser Richtung die Summe der treibenden Kräfte gleich dem Widerstande. Die gleichen Gesetze ergeben sich auch rücksichtlich jedes anderen derartigen Bewegungs-Falles.

Die mechanische Arbeit.

Kräfte, wirksam auf einen materiellen Punkt.

§ 29. Besitzt ein Punkt o (Fig. 55) unter der Einwirkung von Kräften, deren eine die Kraft P ist, eine geradlinige Bewegung in der Richtung o X und bleibt während des Weges x die Richtung und Größe der Kraft P constant, so kann diese Bewegung als das Ergebnis der Zusammensetzung zweier Bewegungen betrachtet werden, wovon die eine in der Kraftlinie o S, die andere senkrecht zu letzterer erfolgt, wobei also dem Punktwege $x = oa$ die Strecke $s = oa'$ als dessen Projection auf die Kraftlinie entspricht.

Unter der von einer Kraft P geleisteten mechanischen Arbeit A versteht man das Product $A = Ps$ aus der Kraftgröße in die Länge der Projection des Kraftangriffspunkt-Weges auf die Kraftlinie; diese Wegprojection $s = oa'$ ist positiv oder negativ in Rechnung zu ziehen, je nachdem die Richtung o gegen a' mit der Kraftrichtung übereinstimmt oder ihr entgegengesetzt ist. Der Kraftangriffspunkt kann entweder ein frei beweglicher oder ein zwangsläufig bewegter, also auch ein mit anderen materiellen Punkten fix verbundener Punkt sein.

Das Product Ps entspricht der Flächen-Maßzahl eines Rechteckes (Fig. 55) von der Grundlinie s und Höhe P.

Einfachster Fall

Die constante Kraft wirkt in der Bewegungsrichtung, wobei die Kraftlinie in die Bahn-Gerade fällt, also ist die mechanische Arbeit unmittelbar durch das Produkt aus der Kraftgröße in den Weg des Kraftangriffspunktes bestimmt.

Besondere Fälle.

§ 30. 1. Ist die Bahn o a des Kraftangriffspunktes krummlinig und die Kraft P der Richtung und Größe nach constant, so gibt, wie unmittelbar aus Fig. 58 zu erkennen, die Summe $s_1 + s_2 + s_3 + \ldots$ der Projectonen der Weg-Elemente

$x_1\ x_2\ x_3$ . . . auf die Kraftlinie zugleich die Projection $s = o\,a'$ des ganzen Weges $o\,a$ auf diese Linie und es ist wieder die mechanische Arbeit A der Kraft P bestimmt durch $A = P\,s$.

2. Ist die Punktbahn gerad- oder krummlinig und ist die Kraft bei gleich bleibender Richtung von veränderlicher Größe, also eine variable Kraft, so denke man den Punktweg $o\,a$ (Fig. 58) in so kleine Theile $x_1\ x_2\ x_3$ . . . zerlegt, dass rücksichtlich irgend eines dieser Wege die dort entsprechende Größe der Kraft als eine constante zu betrachten ist, wobei zu diesen Weg-Elementen beziehungsweise die von einander verschiedenen Kraftgrößen $P_1\ P_2\ P_3$ . . . gehören. Sind wieder $s_1\ s_2\ s_3$ . . . die Projectionen der Wege $x_1\ x_2\ x_3$ . . . auf die Kraftlinie, so ist die mechanische Arbeit dieser Kraft

$$A = P_1\,s_1 + P_2\,s_2 + P_3\,s_3 + \ldots.$$

Werden die Strecken s_1, $s_1 + s_2$, $s_1 + s_2 + s_3$ . . . . vom Punkte o aus (Fig. 56) als Abscissen und die zu $s_1\ s_2\ s_3$ . . . . . gehörenden Kraftgrößen P_1, P_2, P_3 . . . entsprechend als Ordinaten gezeichnet, so ergibt sich ein Diagramm, wobei die Maßzahl F der Fläche obcd durch $P_1\,s_1 + P_2\,s_2 + P_3\,s_3 + \ldots$ bestimmt, also gleich jener der mechanischen Arbeit A ist.

3. Ist die Punktbahn gerad- oder krummlinig und wirkt die an Größe veränderliche Kraft stets in der Bewegungs-Richtung, also entweder in der Richtung o X (Fig. 57) oder tangential (Fig. 57a), sind ferner $P_1\ P_2$ . . . die zu den Weg-Elementen $s_1\ s_2$ . . . . gehörenden Kraftgrößen, so ist unmittelbar $A = P_1\,s_1 + P_2\,s_2 + \ldots.$ und es entspricht in diesem Falle ebenfalls das Arbeits-Diagramm (Fig. 56).

Ist die stets tangential wirkende Kraft von constanter Größe, so ist $A = P\,(s_1 + s_2 + s_3 + \ldots.) = P\,s$, wodurch ein Rechteck bestimmt ist, dessen Grundlinie gleich dem rectificierten Bahnbogen ist.

Anwendung.

Wirkt ein constanter Zahndruck P in einem Punkte tangential am Theilkreise eines Zahn-Rades oder eine constante Riemenkraft tangential am Umfange einer Riemenscheibe (Fig. 60), so fallen während der Bewegung nach und nach die Elemente $\sigma_1\ \sigma_2$ . . . des Theilkreises oder des Umfangskreises vom Durchmesser d in die Kraftlinie und es ist die Arbeit dieser Kraft pro einer Tour

$$A = P\,(\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots) = P\,d\,\pi.$$

4. Ist die Punktbahn gerad- oder krummlinig und die Kraft sowohl der Richtung als der Größe nach veränderlich, entspricht ferner für irgend eine Lage des Kraftangriffspunktes, z. B. jene in o (Fig. 59), dem Weg-Elemente x die oben genannte Weg-Projection s und die Kraftgröße P, so ist rücksichtlich dieses Weg-Elementes die Kraftarbeit bestimmt durch $P\,s$. Bezüglich der auf einander folgenden Wegelement-Projectionen $s_1\ s_2$ . . . . . und Kraftgrößen $P_1\ P_2$ . . . . . ist also die Gesammt-Arbeit

$$A = P_1\,s_1 + P_2\,s_2 + \ldots.$$

d. h. es entspricht auch in diesem Falle ein Arbeits-Diagramm nach Fig. 56.

Steht die Kraft ununterbrochen normal zur Punktbahn, so sind die Projectionen $s_1\ s_2$ . . . der Weg-Elemente auf die entsprechenden Kraftlinien gleich Null und mithin ist auch die mechanische Arbeit dieser Kraft gleich Null.

Zusammensetzung mechanischer Arbeiten.

§ 31. Beschreibt der Punkt o (Fig. 61) infolge der auf ihn wirkenden constanten Kräfte P_1 P_2 P_3 . . . . die gerad- oder krummlinige Bahn o a, so zerlege man jede dieser Kräfte mit Anwendung eines rechtwinkligen Coordinatensystems, wovon eine Axe o X die Strecke o a = l enthält, in zu einander senkrechte Componenten, u. z. in zwei Componenten von den Richtungen o X und o Y, falls alle Kräfte in einer Ebene liegen, anderen Falles in drei Componenten. In beiden Fällen muss bekanntlich die auf der Axe o X liegende Componenten-Summe gleich der entsprechenden durch eine gleichartige Zerlegung der Kraft-Resultante R erhaltenen Resultant-Componente sein. Sind α_1 α_2 α_3 . . . . und α die Winkel, welche beziehungsweise die Kräfte P_1 P_2 P_3 . . . . und deren Resultante R mit der Axe o X bilden, so ist also

$$P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + P_3 \cos \alpha_3 + \ldots . = R \cos \alpha.$$

Sind ferner s_1 s_2 s_3 . . . . die Projectionen des gerad- oder krummlinigen Punktweges o a auf die Linien der Kräfte P_1 P_2 P_3 . . . . und ist s dieselbe Projecton auf die Resultantlinie, so ist

$$\cos \alpha_1 = \frac{s_1}{l}, \ \cos \alpha_2 = \frac{s_2}{l} \text{ u. s. w., } \cos \alpha = \frac{s}{l}$$

und es folgt $\frac{P_1 s_1}{l} + \frac{P_2 s_2}{l} + \ldots . = \frac{R s}{l}$,

$$\text{also } P_1 s_1 + P_2 s_2 + P_3 s_3 + \ldots . = R s, \text{ d. h.}$$

die (algebraische) Summe der Arbeiten der auf einen Punkt wirkenden Kräfte ist gleich der Arbeit ihrer Resultante, wobei die Weg-Projectionen mit den entsprechenden Vorzeichen ($\pm$) in Rechnung zu ziehen sind.

Sind einzelne oder alle diese Kräfte P_1 P_2 P_3 . . . veränderliche, so denke man die ganze Bewegungszeit in so kleine Theile getheilt, dass während jedes solchen Theiles diese Kräfte als constante zu betrachten sind; nun entspricht jedem Zeittheile eine Kraftarbeitssumme a gleich einer Resultantarbeit A und ist mithin auch $\Sigma(a) = \Sigma(A)$, d. h. der angeführte Lehrsatz gilt auch in diesem Falle.

Folgerung. Die Arbeit einer continuierlich auf den Punkt o (Fig. 62) wirkenden Kraft R ist gleich der Arbeit ihrer in die Bewegungsrichtung (oder entgegengesetzt) fallenden Componente P, falls die zweite Componente Q ununterbrochen normal zur Punktbahn a b steht.

Kräfte, wirksam in verschiedenen Punkten eines durch dieselben fortschreitend bewegten Körpers.

§ 32. Die im allgemeinen verschieden gerichteten Kräfte werden mit S, T . . . . bezeichnet. Da bei einer gerad- oder krummlinig fortschreitenden Bewegung die Bahnen sämmtlicher Körperpunkte entweder gleich lange parallele Gerade oder congruente Parallel-Curven sind, so sind die Arbeiten von Kräften S′, T′ . . . ., welche gleiche Größe und Richtung mit den gegebenen haben, aber im Schwerpunkte des Körpers wirksam gedacht werden, wechselweise gleich jenen der gegebenen Kräfte. Nach dem (in §§ 21, 28) Erörterten haben aber die Kräfte S, T . . . dieselbe Resultante R wie die gedachten Parallelkräfte S′, T′ . . . . und nach obigem Lehrsatze ist die Arbeit dieser Resultante gleich der Arbeitssumme dieser Kräfte und mithin auch gleich der Summe der Arbeiten der gegebenen Kräfte S, T . . . . . Es folgt:

Bei einem fortschreitend bewegten Körper ist die (algebraische) Summe der Arbeiten der in verschiedenen Punkten desselben angreifenden Kräfte gleich der Arbeit ihrer im Körper-Schwerpunkte wirksamen Resultante.

Zerlegt man jede der Kräfte S′ T′ . . . . . in zwei Componenten, die eine in der Bewegungsrichtung oder letzterer entgegengesetzt und die andere senkrecht zu dieser Richtung liegend, so ist, wie oben begründet, jede der Arbeiten der letzteren Componenten gleich Null. Die ersteren Componenten lassen sich rücksichtlich jedes Bewegungs-Zeitmomentes ersetzen durch eine Kräfte-Differenz $P - Q = K$ und es ist in Bezug auf die Bewegung, welche infolge der im Körper-Schwerpunkte wirksamen Kraft K erfolgt,

Arbeit von P — Arbeit von Q = Arbeit von K.

Die entgegengesetzt der Bewegungs-Richtung oder in derselben wirkende Trägheits-Reaction (§. 20) ist an Größe stets gleich der Kraft K, nämlich gleich Mp und bei gleichförmiger Bewegung gleich Null; zählt man sie im Falle der beschleunigten Bewegung, wegen $P = Q + K$ zu den Widerständen und im Falle der verzögerten Bewegung, wegen $Q = P + K$, zu den treibenden Kräften, so ist in allen Fällen: die Arbeit der treibenden Kräfte gleich jener der Widerstände oder allgemeiner, es ist die aufgewendete Arbeit gleich der verbrauchten. Das stimmt mit dem in der technischen Praxis angewandten Arbeits-Begriffe überein, vermöge welchem man unter einer mechanischen Arbeit oder Leistung seitens einer in der Bewegungsrichtung wirksamen Kraft (Kraft-Resultante) die Überwindung eines dieser Kraft entgegengesetzt gleichen Widerstandes (Widerstands-Resultante) während eines gewissen vom Kraft-Angriffspunkte zurückgelegten Weges versteht.

Beispiel.

Bei dem auf schiefer Ebene aufwärts zu ziehenden Schlitten (Fig. 42) sind die Zugkraft Z das Schlitten-Gewicht G und die Reibung r an der Bahnfläche wirksam. Die Größe der letzteren ergibt sich durch die aus Fig. 42 ersichtliche Zerlegung des Gewichtes G in die Componenten N, q und desgleichen durch Zerlegung der parallel zu sich an den Schwerpunkt verschobenen Kraft Z in die Componenten n und P; rücksichtlich des Reibungs-Coefficienten φ ist nun der ebenfalls parallel zu sich an den Schwerpunkt verschobene Reibungs-Widerstand $r = \varphi\,(N - n)$. (Die Wirkung der bei der Kräfte-Verschiebung auftretenden Kräftepaare entfällt, da jede Drehung des Schlittens ausgeschlossen ist). Nun ist für $Q = q + r$,

$$P - Q = K = Mp, \left(M = \frac{G}{g}\right).$$

Setzt man eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung während der Zurücklegung des Schwerpunktsweges s voraus, wobei der Schlitten von der Geschwingkeit 0 auf die Geschwindigkeit v kommt, so ist

$$Ps = Qs + Mps, \text{ oder für } s = \frac{v^2}{2p},$$

$$Ps = Qs + \frac{Mv^2}{2}.$$

Die Arbeit, welche nöthig ist, um den Körper von der Geschwindigkeit 0 auf die Geschwindigkeit v zu bringen, wobei fortwährend nur der Trägheits-Widerstand überwunden wird, hat also die Größe $\frac{Mv^2}{2}$.

Soll nun der Schlitten mit der erlangten Geschwindigkeit v gleichförmig weitergehen, so ist $K = 0$, also $Ps = Qs$.

Die Arbeit der im Punkte i angreifenden Kraft Z kann unmittelbar als Arbeit der treibenden Kraft bezeichnet werden, denn sie ist gleich der Arbeit der Kraft P, da die Arbeit der zweiten Componente von Z gleich 0 ist.

Maß der Arbeit, Arbeitsstärke, Effect, Pferdestärke.

§ 33. Da als Kraft-Maßeinheit das Kilogramm und als Weg-Maßeinheit das Meter gewählt wurde, so ist die Arbeits-Maßeinheit das Meterkilo (1 *mkg*). Diese Arbeit ist also gleich jener, welche z. B. die Schwerkraft ohne Rücksicht auf den Luftwiderstand leistet, falls ein Körper von 1 *kg* Gewicht durch die Höhe von 1 *m* frei herabfällt, oder sie ist gleich der Arbeit, welche nöthig ist, um einen constanten Widerstand, z. B. Reibungswiderstand, von der Größe gleich 1 *kg* zu überwinden, wobei der Angriffspunkt des Widerstandes in der Widerstandslinie einen Weg von 1 *m* Länge zurücklegt.

Die in der Zeiteinheit, d. i. in einer Secunde, geleistete mechanische Arbeit bezeichnet man als Arbeitsstärke oder als Effect; in diesem Falle dient als Maß-Einheit das Secunden-Meterkilo, d. i. die in einer Secunde geleistete mechanische Arbeit von der Größe gleich 1 Meterkilo; 75 Secunden-Meterkilo bilden eine Pferdestärke (1 *HP.*).

Ist die mechanische Arbeit einer Kraft rücksichtlich der aufeinander folgenden Secunden verschieden groß, so wird eine in bekannter Weise zu bestimmende mittlere Arbeitsgröße pro Secunde als mittlere Arbeitsstärke oder Durchschnitts-Effect in Rechnung gezogen.

Beispiele.

1) Wenn rücksichtlich der Bewegung eines 800 Tonnen schweren Wagenzuges auf horizontaler Schienenbahn die Widerstände mit $\frac{1}{200}$ des genannten Gewichtes in Rechnung gezogen werden, wie viele Pferdestärken sind zur Überwindung dieser als constant vorausgesetzten Widerstände bei 9 *m* Fahr-Geschwindigkeit nöthig?

Die secundliche Arbeit ist $= \frac{300000.9}{200.75} = 180$ *HP.*

2) Welcher constante Zahndruck P ist nöthig, damit von einer Welle o auf eine Welle o' ein Effect von 4 *HP* übertragen werde, wobei das auf der Welle o' aufgekeilte Rad von 0·6 *m* Durchmesser minutlich 40 Touren macht.

Nach dem Falle 3) (Anwendung §. 30) ist die Arbeit betreffs einer Tour gleich $P\,d\,\pi$ also pro n Touren gleich $P\,d\,\pi\,n$.

Die secundliche Arbeit in Pferdestärken $= \frac{P\,d\,\pi\,n}{60.75} = 4$,

also ist $P = \frac{4.60.75}{d\,\pi\,n} = \frac{4.60.75}{0{\cdot}6.3{\cdot}14.40} = 239$ *kg*.

3) Man beobachtet bei einer Sägemühle, daſs das nur beim Herabgehen Arbeit verrichtende Sägegatter 8 Sägeblätter enthält und in der Minute 90 Schnitt- oder Sägehübe, jeder 600 *mm* lang, gemacht werden, wobei die Zeit für Nebenarbeiten (Rücklauf des Wagens 2c.) cca. $\frac{1}{5}$ der Schnittzeit beträgt. Wenn nun bekannt ist, daſs für die betreffende Holzgattung die Mühle pro Stunde 30 m^2 Schnittfläche liefert und zum Sägen von 1 cm^2 Schnittfläche cca. 4 *mkg* Arbeit erforderlich ist, wie groß ist der als constant vorausgesetzte Widerstand während der Arbeit für ein Sägeblatt und wie viele Betriebs-Pferdestärken müssen blos zur Herstellung dieser Sägearbeit aufgewendet werden.

Die Sägearbeit pro 30 m^2 Schnittfläche $= 30.40000 = 1200000$ *mkg*,

die Zeit hierzu beträgt $\frac{4}{5}$ Stunden $= \frac{4}{5}.\ 3600 = 2880$ sec.

die Arbeit pro Secunde für 8 Sägeblätter $= 1200000 : 2880 = 416{\cdot}7$ *mkg*,

die secundliche Arbeit für 1 Sägeblatt $= 416{\cdot}7 : 8 = 52{\cdot}08$ *mkg*,

Die Geschwindigkeit der Säge während der Arbeit $= \frac{90.0 \cdot 6}{60} = 0 \cdot 9\ m$,

der gesuchte Widerstand $= \frac{52 \cdot 08}{0.9} = 57 \cdot 8\ kg$,

die gesuchte Betriebs-Arbeit $= \frac{416 \cdot 7}{75} = 5 \cdot 5\ HP$.

Mittlere Größe einer veränderlichen Kraft.

§ 34. Entspricht einer veränderlichen Kraft das (in § 30 besprochene) Arbeits-Diagramm (Fig. 56) dessen Grundlinie durch den Weg s des Kraftangriffs-Punktes bestimmt ist, und dessen Ordinaten durch die auf einander folgenden Kraftgrößen gegeben sind, so versteht man unter der **mittleren Größe dieser Kraft rücksichtlich des Kraftangriffs-Weges** s die Größe einer substituierten constanten Kraft P, deren Arbeit bei demselben Kraftangriffs-Wege jener der veränderlichen Kraft an Größe gleich ist. (**Mittlere Kraft, Widerstand im Mittel** ꝛc.) Wird die Maßzahl der Fläche obcd mit F bezeichnet, so ist $P = \frac{F}{s}$.

Beispiel.

Würden bei einer Dampfmaschine den beiderseits des Kolbens während des Kolbenhubes s stattfindenden Dampfdrücken die Diagramme (Fig. 64) abcde und agfe entsprechen, so erscheint der Kolben als Träger einer veränderlichen Kraft, welcher die Flächen-Differenz der genannten Diagramme als Arbeitsdiagramm entspricht. Der Mittelwert dieser Kraft oder der **mittlere effective Dampfdruck** $p_m = \frac{\text{Fläche } gbcdfg}{s} = \frac{F}{s}$.

Da in Figur 64 der Weg s in 10 gleiche Theile getheilt wurde und die eingetragenen Coten 3·6, 5·64..... die betreffenden Ortes statt findenden effectiven Drücke in *kg* pro 1 cm^2 Kolbenfläche angeben, so berechnet man die Fläche F nach **Simpson's Formel**; es ist

$$F = \frac{s}{3.10}\left[3 \cdot 60 + 0 \cdot 28 + 4\,(5 \cdot 64 + 3 \cdot 21 + 2 + 1 \cdot 46 + 1 \cdot 08) + 2\,(4 \cdot 7 + 2 \cdot 44 + 1 \cdot 72 + 1 \cdot 23)\right]$$

mithin $p_m = \frac{F}{s} = 2 \cdot 587\ kg$ pro 1 cm^2.

Die lebendige Kraft.

Lebendige Kraft eines materiellen Punktes.

§ 35. Bewegt sich ein materieller Punkt von der Masse m infolge einer auf denselben in der Bewegungs-Richtung wirkenden constanten Kraft P mit der Beschleunigung p, wobei er während des Weges s von der Geschindigkeit Null auf die Geschwindigkeit v kommt, so ist die Arbeit a der Kraft P gleich Ps. Für $P = mp$ und $s = \frac{v^2}{2p}$ ist

$$a = Ps = \frac{mv^2}{2}.$$

Das Product aus der Masse des Punktes in das halbe Quadrat der von ihm erlangten Geschwindigkeit nennt man die lebendige Kraft dieses Punktes.

Besitzt dieser Punkt die Anfangs-Geschwindigkeit c also auch die lebendige Kraft $\frac{mc^2}{2}$, und kommt er infolge genannter Kraft P während des Weges s auf die Endgeschwindigkeit $v > c$ (Fig. 63), so ist, nach dem Gesetze der gleichmäßig beschleu-

nigten Bewegung, $s = \frac{v^2}{2p} - \frac{c^2}{2p}$, mithin ist die Arbeit dieser Kraft

$$a = Ps = mps = \frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2}.$$

Ist die Endgeschwindigkeit $v < c$, also die Bewegung eine gleichmäßig verzögerte, so wirkt die constante Kraft entgegengesetzt der Bewegungs-Richtung und mithin ist die genannte Arbeit negativ zu nehmen, es ist $a = \frac{mc^2}{2} - \frac{mv^2}{2}$.

Wirkt also auf einen materiellen Punkt eine constante Kraft in der Bewegungs-Richtung oder letzterer entgegengesetzt, so ist deren mechanische Arbeit gleich der Zunahme oder gleich der Abnahme der lebendigen Kraft dieses Punktes.

Ist allgemeinsten Falles die Punktbahn krummlinig und die Kraft P (Fig. 65) während der Bewegung des Punktes ihrer Richtung und Größe nach veränderlich, so ist (nach § 31) die Arbeit a dieser Kraft gleich jener ihrer stets tangential wirkenden Componente, falls die zweite Componente normal zur Bahn steht. Werden die auf einander folgenden Punktwege s_1 s_2 .... so klein genommen, dass während jedes derselben die Tangentialkraft als eine constante zu betrachten ist, ist ferner c die Anfangs-Geschwindigkeit und sind c_1 c_2 .... v die Endgeschwindigkeiten des Punktes rücksichtlich dieser Weg-Elemente, so entsprechen den auf einander folgenden Kraft-Arbeiten die Änderungen der lebendigen Kraft dieses Punktes von den Größen $\frac{m}{2}(c_1^2 - c^2)$, $\frac{m}{2}(c_2^2 - c_1^2)$, ... $\frac{m}{2}(v^2 - c_{n-1}^2)$ und die Summe dieser Arbeiten d. i. die Arbeit a der Kraft P ist gleich der Summe dieser Änderungen, also gleich $\frac{m}{2}(c_1^2 - c^2 + c_2^2 - c_1^2 + ... + v^2 - c_{n-1}^2)$; es resultiert

$$a = \frac{mv^2}{2} - \frac{mc^2}{2}.$$

Die mechanische Abeit der auf einen materiellen Punkt wirkenden in Bezug auf Richtung oder Größe oder in beiden Hinsichten veränderlichen Kraft ist gleich der von ihr hervorgerufenen Änderung der lebendigen Kraft dieses Punktes.

Für c gleich Null, ist diese Arbeit a gleich der lebendigen Kraft $\frac{mv^2}{2}$.

Bewegung auf ebenen und gekrümmten Gleitflächen infolge der Schwerkraft.

§ 36. Ohne Rücksicht auf die Reibung muss der materielle Punkt (Kleinkörper) vom Gewichte G in den durch Fig. 66, I bis V, dargestellten Fällen, falls dessen Anfangs-Geschwindigkeit gleich Null und der Vertical-Abstand zwischen dem Anfangs- und Endpunkte der Bahn gleich h ist, einerlei Endgeschwindigkeit v bei seiner Bewegung infolge der Schwerkraft erlangen; denn es ist in diesen fünf Fällen die Länge der Projection der Punktbahn auf die Kraftrichtung gleich h und mithin ist nach dem Gesetze der lebendigen Kraft die Arbeit

$$Gh = \frac{mv^2}{2} = \frac{Gv^2}{2g}, \text{ mithin } v = \sqrt{2gh}.$$

Diese Geschwindigkeit ist also eben so groß, **als ob der Körper durch die Höhe h frei gefallen wäre.**

In den Fällen I, II ist die Beschleunigung p des bewegten Punktes von constanter Größe, denn die beschleunigende Kraft ist die in die Bewegungs-Richtung fallende constante Gewichtscomponente $G \sin \alpha$, die zweite normal zur Bahn stehende Componente wird aufgehoben; es ist $p = \frac{G \sin \alpha}{m} = G \sin \alpha : \frac{G}{g} = g \sin \alpha$.

In den Fällen III, IV, V ist die Beschleunigung nicht constant, denn sie ist z. B. an der Stelle o übereinstimmend mit der Beschleunigung $p' = g \sin \alpha'$, welche der bewegte Punkt auf einer dort entsprechenden Tangential-Bahn erhalten würde.

Bewegung auf einer Vertical-Kreisbahn infolge der Schwerkraft, (Centrifugalbahn).

Ist r der Radius dieser Bahn (Fig. 67), so erlangt der materielle Punkt (Kleinkörper) infolge seines Gewichtes $G = m\ g$ bei seiner Herab-Bewegung auf irgend einer anderen gerad- oder krummlinigen festen Bahn a b, entsprechend einer Freifall-Höhe $2r+h$, an der Eintrittsstelle b in die Kreisbahn die Geschwindigkeit $c = \sqrt{2g(2r+h)}$ und die lebendige Kraft $\frac{mc^2}{2}$, falls die Reibung unberücksichtigt bleiben kann. Unter derselben Voraussetzung ist bei seiner Bewegung auf der Kreisbahn nebst dem Gewichte G der durchaus normal zum Kreise gerichtete Widerstand W seitens der festen Bahn wirksam, diese zwei Kräfte müssen sich an allen Stellen der Bahn durch eine radical einwärts wirkende Centripetalkraft $Q = \frac{m v^2}{r}$ und durch eine Tangentialkraft $P = m p$ ersetzen lassen. Verlangt man, dass der Widerstand W durchaus radial einwärts also der diesem Widerstande entgegengesetzt gleiche **Druck des Körpers auf die feste Bahn stets radial auswärts gerichtet** sei, so sind für irgend eine Lage des bewegten Punktes, z. B. für jene bei o, entsprechend den im Bewegungssinne zu messenden Centriwinkel φ, die Normal- und Tangential-Componente von G gegeben durch $G \cos \varphi$ und $G \sin \varphi$, es ist also

$$Q = \frac{G v^2}{g r} = W - G \cos \varphi \ldots\ldots (1 \text{ und}$$

$$P = \frac{G}{g}\ p = G \sin \varphi \ldots\ldots\ldots (2.$$

Die Geschwindigkeit v des bewegten Punktes ist an dieser Stelle, entsprechend der Freifallhöhe $h+x$, bestimmt durch

$$v^2 = 2g\ (h + r + r \cos \varphi).$$

Rücksichtlich der auf einander folgenden Werte von v für $\varphi = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ ergibt sich, dass von b über o bis d fortwährend eine Geschwindigkeits-Abnahme, also eine verzögerte Bewegung und von d über f bis b ununterbrochen eine Geschwindigkeits-Zunahme, also eine beschleunigte Bewegung stattfindet. Die Verzögerung (Beschleunigung) p ist gleich $g \sin \varphi$

Substituiert man den Wert für v^2 in die Relation (1, so folgt

$$W = 2\,G\ \left(\frac{h}{r} + 1 + \frac{3}{2}\ \cos \varphi\ \right);$$

für $\varphi = 180^\circ$ also $\cos \varphi = -1$ ist $W = 2\ G\ \left(\frac{h}{r} - \frac{1}{2}\right)$, also muss $h > \frac{r}{2}$ sein, wenn auch noch an der höchsten Stelle, d. i. bei d, der Widerstand W radial einwärts gerichtet sein soll. Die an allen Stellen der Bahn radial auswärts wirkende **Centrifugalkraft** des bewegten Punktes hat die Größe $\frac{m v^2}{r}$ und ist an der höchsten Bahnstelle, also für $v^2 = 2gh$, bestimmt durch $\frac{2\,G h}{r}$.

Lebendige Kraft eines Systems materieller Punkte.

§ 37. Unter der lebendigen Kraft eines Körpers versteht man die Summe der in irgend einem Bewegungs-Zeitmomente erlangten lebendigen Kräfte seiner materiellen Punkte. In § 18 wurde erörtert, dass auf die Änderung der Bewegungszustände — also auch der Geschwindigkeiten — sämmtlicher Körperpunkte die inneren zwischen diesen Punkten wirksamen und paarweise entgegengesetzt gleichen Kräfte ohne Einfluss sind, also sind auch die in irgend einem Zeitmomente erlangten Geschwindigkeiten dieser Punkte und ist damit auch die in diesem Augenblicke erlangte lebendige Kraft des Körpers nur eine Folge der Wirkung äußerer Kräfte, mag die Bewegung desselben wie immer beschaffen sein.

Lebendige Kraft eines fortschreitend bewegten Körpers.

Besitzen bei einer gerad- oder krummlinig-fortschreitenden Bewegung sämmtliche Körperpunkte die Anfangs-Geschwindigkeit c und erlangen sie nach irgend einer Zeit, während welcher die äußeren Kräfte S, T . . . auf den Körper wirken, die End-Geschwindigkeit v, so ist, falls mit M die Masse des Körpers bezeichnet wird, die Änderung seiner lebendigen Kraft gleich

$$\Sigma\left(\frac{mv^2}{2}\right) - \Sigma\left(\frac{mc^2}{2}\right) = \frac{v^2}{2}\,\Sigma(m) - \frac{c^2}{2}\,\Sigma(m) = \frac{Mv^2}{2} - \frac{Mc^2}{2},$$

also gleich der Änderung der lebendigen Kraft eines materiellen Punktes von der Masse M und den genannten Geschwindigkeiten. Da sich aber der Schwerpunkt dieses Körpers so bewegt, wie ein an dessen Stelle befindlicher frei beweglicher materieller Punkt von der Masse M, auf welchen die Resultante R der Kräfte S, T . . . wirkt, und da die Arbeiten dieser Kräfte wechselweise gleich jenen ihrer an diesen Punkt verschobenen Parallelkräfte S′, T′ . . . sind, so ist

$$\frac{Mv^2}{2} - \frac{Mc^2}{2} = \text{Arbeit von } R = \text{Summe der Arbeiten der Kräfte } S, T \ldots \text{ (§ 32) d. h.}$$

die (algebraische) Summe der Arbeiten der Kräfte S, T . . . ist gleich der durch dieselbe hervorgerufenen Änderung der lebendigen Kraft des fortschreitend bewegten Körpers.

Wie bereits (in §. 32) gezeigt wurde, lässt sich diese algebraische Summe auf die Differenz der Arbeiten zweier im Schwerpunkte angreifender Kräfte P und Q zurückführen, wovon die erste ununterbrochen in der Bewegungsrichtung und die andere ihr entgegen wirkt; da im allgemeinen diese Kräfte P und Q zwei Kraftsummen repräsentieren, so folgt:

$$\text{Arbeit der treibenden Kräfte weniger Arbeit der Widerstände} = \frac{Mv^2}{2} - \frac{Mc^2}{2}.$$

Je nachdem diese Arbeits-Differenz positiv oder negativ ist, ist entweder $v > c$ oder $c > v$, d. h. die Bewegung ist im ersten Falle eine beschleunigte, im zweiten Falle eine verzögerte.

Sind im zweiten Falle nur Widerstände vorhanden, und dauert die Bewegung so lange, bis der Körper von seiner Anfangs-Geschwindigkeit c auf die Endgeschwindigkeit 0 kommt, so ist die

$$\text{Arbeit der Widerstände gleich der verlorenen lebendigen Kraft } \frac{Mc^2}{2}.$$

Im Sinne des (in §. 32 erörterten) praktisch-technischen Begriffes einer mechanischen Arbeit kann man daher auch die lebendige Kraft eines eine gewisse Geschwindigkeit besitzenden Körpers definieren als dessen Fähigkeit, eine mechanische Arbeit zu leisten,

wobei er diese Geschwindigkeit verliert. Da aber, um den Körper von der Geschwindigkeit 0 auf die Geschwindigkeit c zu bringen, eine Arbeit von derselben Größe $\frac{Mc^2}{2}$, gleichgiltig durch welche Kräfte, aufgewendet werden mußte, so entspricht auch in diesem Falle das durch alle Erfahrungen bestätigte und bereits (in §. 32) angeführte Gesetz: „Die aufgewandte Arbeit ist stets gleich der verbrauchten."

Anmerkung.

Die Arbeitsfähigkeit eines Körpers im allgemeinen, bezeichnet man als dessen Energie. Da ein Körper infolge einer aufgewandten mechanischen Arbeit auch im Zustande der Ruhe eine gewisse Arbeitsfähigkeit besitzen kann, wie z. B. eine gespannte Feder, so unterscheidet man zwischen einer Energie der Bewegung oder kinetischen Energie und einer Energie der Ruhe oder potentiellen Energie. Das Gesetz, daß nur eine „Umsetzung einer Arbeitsform in eine gleichwertige andere" also kein absoluter Verlust an aufgewandter Arbeit möglich ist, bildet die Grundlage des Princips der Erhaltung der Energie.

Beispiele.

1) Welche constante Kraft P ist erforderlich, um in der Zeit von 5 sec. einen 1000 *kg* schweren Körper von 1 *m* Geschwindigkeit auf 2 *m* zu bringen, wie groß ist die ganze Arbeit dieser Kraft und wie groß ist deren durchschnittliche Arbeitsstärke in Pferdestärken.

Es ist $Ps = \frac{m}{2}(v^2 - c^2)$ und, da die Bewegung gleichmäßig beschleunigt ist, so ist $s = \left(\frac{c+v}{2}\right) t$, mithin

$P = \frac{m(v^2 - c^2)}{(c+v)t} = \frac{G}{g}\left(\frac{v-c}{t}\right)$. Für $v = 2$, $c = 1$, $G = 1000$ ist $P = 20{\cdot}4$ *kg*

Die Arbeit $Ps = \frac{Pt}{2}(c+v) = 153$ *mkg*.

Der Durchschnitts-Effect $= \frac{153}{5.75} = 0{\cdot}4$ *HP*.

2) Welche Arbeitsstärke ist nöthig, um auf horizontaler Schienenbahn einen Wagenzug von 60 Tonnen Gewicht gleichförmig mit 9 *m* Geschwindigkeit zu bewegen und welchen Weg legt derselbe nahezu gleichmäßig verzögert noch zurück, falls plötzlich die treibende Kraft (Dampfkraft) zu wirken aufhört und in beiden Bewegungsfällen die Widerstände mit $\frac{1}{200}$ der bewegten Last in Rechnung gezogen werden.

Arbeitsstärke bei gleichförmiger Bewegung gleich $\frac{G\ v}{200.75} = \frac{60000.9}{15000} = 36$ *HP*.

Erlangte lebendige Kraft $= \frac{Gv^2}{2g}$, diese wird verwendet zur Überwindung der Widerstände gleich $\frac{G}{200}$ während des gesuchten Weges s. Es ist

$$\frac{Gv^2}{2g} = \frac{Gs}{200} \text{ also } s = \frac{200.v^2}{2g} = \frac{200.81}{2.9{\cdot}81} = 826\ m.$$

3) Welche Arbeit ist nöthig um einen Stämpfer vom Gewichte $G = 40$ *kg.* mittelst eines Hebebaumens auf eine Höhe $h = 300$ *mm* zu heben, wobei dieser Stämpfer beim Beginne der Bewegung auf eine so große Geschwindigkeit v zu bringen ist, daß er mit letzterer die genannte Bewegung nahezu gleichförmig in einer Zeit $t = \frac{2}{3}$ sec. vollführt.

Es ist $A = Gh + \frac{Gv^2}{2g} = G\left(h + \frac{v^2}{2g}\right)$ und $v = \frac{h}{t} = 0{\cdot}3 : \frac{2}{3} = 0{\cdot}45\,m$, mithin ist $A = 40\left(0{\cdot}3 + \frac{0{\cdot}45^2}{2.9{\cdot}81}\right) = 40.0{\cdot}31 = 12{\cdot}4$ *mkg.*

Bewegungsgröße, Antrieb der Kraft.

§ 38. Bewegt sich ein materieller Punkt, dessen Masse m ist, von der Ruhe aus geradlinig infolge einer in der Bewegungsrichtung (oder entgegengesetzt) wirkenden constanten Kraft P, entsprechend einer Beschleunigung (Verzögerung) p, wobei er nach einer gewissen Zeit t die Geschwindigkeit v erlangt, so ist

$$v = p\,t = \frac{P}{m}\,t \text{ also } m\,v = P\,t.$$

Man nennt das Product $m\,v$ die Größe der Bewegung rücksichtlich der Masse m, und das Product $P\,t$ den Antrieb der Kraft während der Zeit t. Ist bezüglich dieses Bewegungs-Falles t_1 die Zeit zur Erlangung einer Geschwindigkeit c und t_2 die Zeit zur Erlangung einer Geschwindigkeit v, und wird $t_2 - t_1 = t$ gesetzt, so ist $m\,v - m\,c = P\,t$.

Die Änderung der Bewegungsgröße während einer gewissen Zeit ist gleich dem Kraftantriebe in dieser Zeit.

Ist allgemeinsten Falles die Bewegung dieses Punktes gerad- oder krummlinig und die stets in der Bewegungsrichtung (oder ihr entgegengesetzt) wirkende Kraft eine veränderliche, welche während der auf einander folgenden sehr kleinen Zeittheile $\tau_1\,\tau_2\,.\,.\,.\,.\,.\,\tau_n$ die Größen $P_1\,P_2\,.\,.\,.\,.\,.\,P_n$ besitzt, so ist bezüglich jedes dieser Zeittheile das für eine constante Kraft geltende Gesetz $m\,v - m\,c = P\,t$ verwendbar. Benennt man mit c die Anfangsgeschwindigkeit und mit v die Endgeschwindigkeit der ganzen Bewegung, ferner mit $c_1\,c_2\,.\,.\,.\,.\,.$ die Endgeschwindigkeiten bezüglich der Zeittheile $\tau_1\,\tau_2\,.\,.\,.\,.\,.$, so ist demnach

$$\begin{aligned} m\,c_1 - m\,c &= P_1\,\tau_1 \\ m\,c_2 - m\,c_1 &= P_2\,\tau_2 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ m\,v - m\,c_{n-1} &= P_n\,\tau_n \end{aligned}$$

und es folgt durch Addition

$$m\,v - m\,c = \Sigma(P\tau).$$

Trägt man die vom Anfange der Bewegung aus gezählten Zeiten τ_1, $\tau_1 + \tau_2$, ... als Abscissen und die den Zeittheilen $\tau_1\,\tau_2\,.\,.\,.\,.\,.$ entsprechenden Kraftgrößen als Ordinaten auf (wie in Fig. 56), so ist durch $\Sigma\,(P\tau)$ eine Fläche F bestimmt und man kann jene substituierte constante Kraft P′, welche mit dieser veränderlichen Kraft bei gleicher Bewegungszeit t einerlei Kraft-Antrieb besitzt, als Mittelkraftgröße (Mittelkraft) rücksichtlich der Bewegungszeit t bezeichnen; sie ist wegen $P'\,t = F$, durch die Höhe eines Rechteckes von der Grundlinie t und Fläche F gegeben. Aus $m\,v - m\,c = \Sigma(P\tau) = P'\,t$ folgt, dass obiger Lehrsatz von der Änderung der Bewegungsgröße auch bezüglich der genannten veränderlichen Kraft gilt, falls unter $\Sigma(P\tau)$ der Antrieb dieser Kraft verstanden wird.

Dieser Lehrsatz kann im Sinne des (in § 21 und § 28) begründeten Schwerpunkts-Gesetzes bei der fortschreitenden Bewegung eines Körpers in Anwendung kommen.

Wirken während einer gewissen Zeit in jedem Augenblicke paarweise entgegengesetzt gleiche constante oder veränderliche Kräfte auf einen derartig bewegten Körper, so wird nach letzterem Gesetze, durch diese Kräfte dessen Schwerpunkt keine Geschwindigkeits-Änderung erfahren, wohl

aber können, falls dieses innere Kräfte sind (§. 18), bei den Theilen des Körpers Änderungen ihrer Bewegungsgrößen während genannter Zeit stattfinden. Betrachtet man z. B. die Kanone mit ihrer im Rohre befindlichen Kugel als einen Körper, so ergibt sich, dass sich die Lage des Schwerpunktes dieses Körpers während der Pulver-Explosionsdauer nicht ändern kann, falls vor dieser Zeit die Kanone ruhig stand; es muss also während der Bewegung der Kugel im Rohre der sogenannte „Rücklauf" der Kanone stattfinden, damit die genannte Schwerpunktslage erhalten bleibt. Setzt man voraus, dass in jedem Augenblicke der kleinen Explosionszeit der veränderliche Druck auf die Kugel entgegengesetzt gleich jenem auf die Kanone ist, dass also diese beiden Kraftantriebe gleich groß sind, so erlangen die Kugel und die Kanone am Ende dieser Zeit die entgegengesetzt gerichteten Geschwindigkeiten v und v', rücksichtlich welcher, wenn mit m und M deren Massen bezeichnet werden, der obige Lehrsatz gilt, $Pt = M v' = m v$.

Beispiele.

1) Falls einem Punkte der sehr flachen Wurf-Parabel einer infolge Explosionswirkung in horizontaler Richtung geworfenen Kugel die Abscisse $a = 80\ m$ und die Ordinate $b = 0{\cdot}1\ m$ entspricht, wie groß ist die Geschwindigkeit dieser Kugel beim Beginne dieser Bewegung und mit welcher Mittel-Kraftgröße, rücksichtlich einer sehr kleinen Antriebszeit, würde sie auf einen nahe bei ihrem Bewegungsanfange befindlichen Körper treffen, wenn ihr Gewicht $G = 10\ kg.$ ist.

Ohne Rücksicht auf den Luft-Widerstand ist nach Beispiel 1) in § 9, die Geschwindigkeit

$$v = a\sqrt{\frac{g}{2b}} = 80\sqrt{\frac{9{\cdot}81}{0{\cdot}2}} = 560\ m.$$

Aus $Pt = m v = \frac{G}{g} v$ folgt $P = \frac{Gv}{gt} = \frac{5600}{9{\cdot}81t} = \frac{560}{t}$.

Für $t = \frac{1}{10}, \frac{1}{100}$ . . . . Secunden ist beziehungsweise die gesuchte Kraft

$$P = 5600,\ 56000,\ \ldots\ kg.$$

2) Wenn zu der im Beispiele 1) genannten Kugel eine Kanone gehört, welche, inclusive Fahrgestell rc., 2000 $kg.$ wiegt, wie groß ist ohne Rücksicht auf sonstige Umstände die zur berechneten Kugel-Geschwindigkeit v gehörende Rücklaufs-Geschwindigkeit v', welche Arbeitsgröße A' ist zur Erlangung dieser Geschwindigkeit nöthig und wie groß ist die infolge der Explosion erzeugte lebendige Kraft A der Kugel.

Aus $Mv' = mv$ oder $\frac{2000\ v'}{g} = \frac{10\ v}{g}$ folgt, für $v = 560\ m.$,

$$\text{die Rücklaufs-Geschwindigkeit } v' = \frac{10\ v}{2000} = 2{\cdot}8\ m.$$

$$\text{die Arbeitsgröße } A' = \frac{Mv'^2}{2} = \frac{2000.2{\cdot}8^2}{2g} = 799\ mkg.$$

$$\text{die lebendige Kraft } A = \frac{mv^2}{2} = \frac{10.560^2}{2.9{\cdot}81} = 159840\ mkg.$$

$$A = 200\ A'.$$

Drehende Bewegung eines Körpers um eine fixe Axe.

Drehkräfte, deren Momente und Arbeiten.

§ 39. Rotiert oder oscilliert ein Körper um eine Axe oZ (Taf. IV, Fig. 68), so durchlaufen dessen materielle Punkte einerlei Drehwinkel φ (Bogen vom rad = 1), und besitzen in irgend einem Bewegungs-Zeitmomente einerlei Winkel-Beschleunigung ε und einerlei Winkelgeschwindigkeit ω (§ 15).

Wirkt im Körperpunkte i eine Kraft Q in beliebiger Richtung und wird dieselbe in drei zu einander senkrechte Componenten zerlegt, wovon die erste u parallel zur Axe und die zweite v normal zur Axe auf letztere wirkt, so kann, falls diese

Axe fix bleiben soll, nur die dritte im Punkte i tangential an den Drehkreis vom Radius r wirksame Kraft (Drehkraft) bei dieser Bewegung in Betracht gezogen werden. Diese Kraft k läßt sich bekanntlich durch ein Kräftepaar vom Momente k r und durch eine auf die Axe wirkende Einzelnkraft ersetzen. Sind also mehrere äußere Kräfte Q_1 Q_2 .... in verschiedenen Punkten des Körpers wirksam, so ergeben sich in dieser Art mehrere Kräftepaare in parallelen zur Drehaxe senkrechten Ebenen von den Momenten $k_1 r_1$, $k_2 r_2$ u. s. w. welchen bekanntlich ein resultierendes in irgend einer Drehebene liegendes Paar entspricht von dem Momente

$$P R = k_1 r_1 + k_2 r_2 + \ldots\ldots \quad (1$$

Sind die Kräfte k_1 k_2 .... constante, so ist auch die im Axen-Abstande R wirksam zu denkende Kraft P des resultierenden Drehkraft-Momentes eine constante und, da während der Drehung um den Winkel φ die genannten Kräfte fortwährend tangential zu den betreffenden Drehkreisen wirken, so sind (nach § 30) die dieser Bewegung entsprechenden Kraft-Arbeiten durch $k_1 (r_1 \varphi)$, $k_2 (r_2 \varphi)$ ..... $P (R \varphi)$ gegeben. Wird aber die Gleichung (1 mit φ multipliciert, so folgt

$$A = P R \varphi = k_1 r_1 \varphi + k_2 r_2 \varphi + \ldots$$

Sind die Kräfte k_1 k_2 .... nicht constante, so gilt dieses Gesetz rücksichtlich jeder der auf einander folgenden als so klein vorausgesetzten Drehbogentheile, dass, während der irgend einem solchen Theile zugehörigen Bewegung, diese Kräfte als constante vorausgesetzt werden können. Es ist also rücksichtlich der ganzen Bewegung ebenfalls die resultierende Drehkraft-Arbeit A gleich der Summe der Arbeiten der Drehkräfte k_1 k_2 ....

Da die Componenten u, v der Kraft Q normal zur Bewegungs-Richtung stehen, also deren Arbeiten gleich Null sind, so ist überhaupt die resultierende Drehkraft-Arbeit A gleich der Summe der Arbeiten der gegebenen Kräfte Q_1 Q_2 ....

Resultierendes Drehkraft-Moment, lebendige Kraft.

Befindet sich der bewegte Körper in irgend einer seiner Lagen und besitzt in diesem Augenblicke ein im Abstande ϱ_1 von der Drehaxe liegender Punkt dieses Körpers die Masse m_1 (Fig. 68) und die Umfangs-Beschleunigung $p_1 = \varrho_1 \varepsilon$, so bewegt er sich so, als ob eine Tangentialkraft $m_1 p_1$ vom Drehmomente $m_1 p_1 \varrho_1 = m_1 \varepsilon \varrho_1^2$ wirksam wäre; ebenso entsprechen gleichzeitig den übrigen materiellen Punkten Drehkraft-Momente von den Größen $m_2 \varepsilon \varrho_2^2$, $m_3 \varepsilon \varrho_3^2$ .... Werden diese Kraftmomente, wie früher erklärt, zu einem resultierenden Momente vereinigt, d. h. summiert, so muss letzteres, da die Bewegung wirklich infolge der Drehkräfte k_1 k_2 .... erfolgt, dem resultierenden Momente P R der letzteren gleich sein. Es ist also

$$m_1 \varepsilon \varrho_1^2 + m_2 \varepsilon \varrho_2^2 + \ldots = \varepsilon \Sigma (m \varrho^2) = P R.$$

Unter dem Trägheitsmomente $T = \Sigma (m \varrho^2)$ eines Körpers versteht man die Summe der Producte aus dessen Punktmassen in die Quadrate ihrer entsprechenden Punkt-Abstände von der Drehaxe.*)

*) Der Name Trägheitsmoment rührt daher, dass die Tangential (Trägheits)-Reactionen ebenfalls die Größen $m_1 p_1$, $m_2 p_2$ .... besitzen und mithin deren resultierendes Moment auch durch $PR = \varepsilon \Sigma (m \varrho^2)$ bestimmt ist. Für $\varepsilon = 1$, wird $PR = T$. Die Normal-Reactionen (Centrifugalkräfte) stehen beziehungsweise normal zu den Kräften $m_1 p_1$, $m_2 p_2$, ...

Es ist also die Winkel-Beschleunigung $\varepsilon = \frac{\text{Drehkraft Moment P R}}{\text{Trägheitsmoment T}}$.

Entspricht die von der Ruhe aus erfolgte Bewegung des Körpers irgend einem Drehwinkel φ, so erlangen die materiellen Punkte am Ende derselben die Umfangs-Geschwindigkeiten $\varrho_1\, \omega$, $\varrho_2\, \omega$ .... also die lebendigen Kräfte $\frac{m_1\, (\varrho_1\, \omega)^2}{2}$, $\frac{m_2\, (\varrho_2\, \omega)^2}{2}$ .... deren Summe die lebendige Kraft des Körpers bildet.

Es ist $(m_1\, \varrho_1{}^2 + m_2\, \varrho_2{}^2 + \ldots.) \frac{\omega^2}{2} = \frac{T\omega^2}{2}$.

Die lebendige Kraft des gedrehten Körpers ist gleich dem Producte aus seinem Trägheits-Moment T in das halbe Quadrat seiner Winkel-Geschwindigkeit.

Da die von den materiellen Punkten erlangten lebendigen Kräfte gleich den Arbeiten der auf dieselben als wirksam angenommenen Tangential-Kräfte $m_1\, p_1$, $m_2\, p_2$ .... sind, wobei letztere entweder constant oder variabel sein können (§ 35) und da sich ferner, wie früher erklärt wurde, durch die Summierung dieser Arbeiten eine resultierende Drehkraft-Arbeit ergibt, so hat letztere die Größe $\frac{T\, \omega^2}{2}$. Diese Gesammt-Arbeit wird wirklich geleistet von den Drehkräften $k_1\, k_2$ .... wobei die Summe der Arbeiten dieser Kräfte gleich jener A der urspünglich gegebenen Kräfte $Q_1\, Q_2$ .... ist; es ist also $A = \frac{T\, \omega^2}{2}$.

Besitzt der Körper eine Anfangs-Winkel-Geschwindigkeit ω_1, also eine lebendige Kraft $\frac{T\, \omega_1{}^2}{2}$ und kommt er infolge Wirkung der Kräfte $Q_1\, Q_2$ .... auf die Winkel-Geschwindigkeit ω, so wurde von diesen Kräften eine Gesammt-Arbeit A in der Größe $A = \frac{T\omega^2}{2} - \frac{T\, \omega_1{}^2}{2}$ geleistet d. h. die (algebraische) Summe der Arbeiten der gegebenen Kräfte $Q_1 . Q_2$ .... ist gleich der durch dieselben hervorgerufenen Änderung der lebendigen Kraft, $\frac{T\omega^2}{2} - \frac{T\omega_1{}^2}{2}$, des rotierenden Körpers.

Kräfte, deren Linien parallel zur Axe sind oder letztere schneiden, beeinflußen die Drehung nur indirect, insofern von denselben Dreh-Widerstände (z. B. Zapfen-Reibungen) abhängen können; die Relation (1 bezieht sich auch auf diese Drehkräfte.

Beispiel.

Ist ein Zahnrad vom Theilkreis-Radius r (Fig. 69) auf einer horizontalen Welle aufgekeilt, so ist das Rad sammt Welle als ein infolge des continuierlichen Zahndruckes P um die freie Axe o rotierender Körper zu betrachten. Wird die Kraft P durch das Kräftepaar vom Momente Pr und durch die Einzelnkraft (P) ersetzt, so resultiert durch Zusammensetzung der letzteren mit dem Gewichte G des Rades sammt Welle der Normal-Lagerdruck N und infolge dessen eine auf beide gleich große Zapfen vertheilte, dem Bewegungssinne entgegengesetzt wirkende Zapfen-Reibung φ N, vom Momente $\varphi N \varrho$ (φ Reibungs-Coeff. ϱ Zapfen-Radius).

Wird mit T das Trägheitsmoment des Rades sammt Welle bezeichnet, so ist das resultierende Drehkraft-Moment

$$Pr - \varphi N \varrho = \varepsilon\, T.$$

Die Winkelbeschleunigung ε ist constant oder veränderlich, je nachdem der Zahndruck P und mithin auch die Reibung φ N constant oder veränderlich ist. In beiden Fällen ist aber, falls sich das Rad von der Ruhe aus bewegt und nach irgend einer Zeit die Winkel-Geschwindigkeit ω erlangt, die während dieser Zeit geleistete

$$\text{Arbeit von } P - \text{Arbeit von } \varphi N = \text{lebendiger Kraft } \frac{T\omega^2}{2}.$$

Anmerkung.

Dass die Gesetze der rotierenden Bewegung den in §. 21 und §. 37 rücksichtlich der fortschreitenden Bewegung erörterten, analog sind, kann in folgender Art begründet werden. Die in eingangs angegebener Weise erhaltenen Drehkräfte werden allgemeinsten Falles entweder im Bewegungssinne oder diesem entgegengesetzt wirksam, d. h. sie werden entweder als treibende Kräfte oder als Widerstandskräfte zu bezeichnen sein. Ist für irgend eine Lage des Körpers Pp das resultierende Kraftmoment der ersteren und Qq das resultierende Moment der letzteren Kräfte, so ist

$$Pp - Qq = \varepsilon T$$

wobei die Größe εT gleich dem resultierenden Momente der Tangential-Trägheits-Widerstände ist (§. 39, Anmerkung).

Zählt man diese Größe εT im Falle der beschleunigten Bewegung, also für $Pp > Qq$, zu den Widerstands-Kraftmomenten und im Falle der verzögerten Bewegung, also für $Qq > Pp$, zu den Treibkraft-Momenten, so ist in beiden Fällen die Summe der Momente der treibenden Kräfte gleich der Summe der Momente der Widerstände.

Im Falle der gleichförmigen Bewegung ist die Winkel-Beschleunigung $\varepsilon = 0$ also ist $Pp = Qq$.

Bewegt sich der Körper von der Ruhe aus und bezeichnet man die Summe der Arbeiten der im Bewegungssinne wirkenden Drehkräfte mit a und jene der entgegengesetzten Sinnes wirkenden Kräfte mit a', so ist

$$a - a' = \frac{T\omega^2}{2},$$

wobei die Größe $\frac{T\omega^2}{2}$ gleich der zur Überwindung der Tangential-Trägheits-Reactionen nöthigen Arbeit ist. Zählt man wieder diese Größe, im Falle der beschleunigten Bewegung, also für $a > a'$, zu den Widerstands-Arbeiten und im Falle der verzögerten Bewegung, also für $a' > a$, zu den Arbeiten der treibenden Kräfte, so ist in beiden Fällen die Summe der Arbeiten der treibenden Kräfte gleich der Summe der Arbeiten der Widerstände.

Ist besonderen Falles die Arbeit a gleich Null, so repräsentiert die Größe $\frac{T\omega^2}{2}$ allein die Arbeit der treibenden Kräfte, womit die Anwendung der in §. 37 angeführten Definition der lebendigen Kraft im practisch-mechanischen Sinne auch rücksichtlich der rotierenden Bewegung gerechtfertigt ist.

Im Falle der gleichförmigen drehenden Bewegung ist $\frac{T\omega^2}{2}$ gleich Null, also $a = a'$.

Bewegt sich der Körper nicht von der Ruhe aus, bewirken also die Drehkräfte nur eine Änderung seiner lebendigen Kraft, so ist $a - a' = \frac{T\omega^2}{2} - \frac{T\omega_1^2}{2}$, d. h. es tritt an Stelle der Größe $\frac{T\omega^2}{2}$ die Größe des Gewinnes oder Verlustes an lebendiger Kraft.

Das Trägheitsmoment.

Lehrsatz bezüglich zweier Parallel-Axen.

§ 40. Im Folgenden wird vorausgesetzt, dass jeder der rotierenden Körper ein homogener sei.

Sind SS und OO (Fig. 70) zwei zu einander parallele Axen im Abstande a, wovon die eine SS durch den Schwerpunkt des Körpers geht, und ist m_1 die Masse

eines der materiellen Punkte des letzteren, wird ferner mit E eine durch die Axe SS senkrecht zum Abstande a gelegte Ebene und werden mit r_1 ϱ_1 x_1 beziehungsweise die in einer Ebene normal zu beiden Axen liegenden Abstände dieses Körper-Theilchens von der Axe SS, von der Axe OO und von der Ebene E bezeichnet, so ist

$$\varrho_1^2 = (r_1^2 - x_1^2) + (a + x_1)^2 = r_1^2 + a^2 + 2 a x_1 \text{ und mithin ist}$$

$$m_1 \varrho_1^2 = m_1 r_1^2 + m_1 a^2 + 2 a m_1 x_1$$

ebenso für ein zweites Theilchen . . . $m_2 \varrho_2^2 = m_2 r_2^2 + m_2 a^2 + 2 a m_2 x_2$ u. s. w.
durch Summierung ergibt sich. . . . $\Sigma(m \varrho^2) = \Sigma(m r^2) + a^2 \Sigma(m) + 2 a \Sigma(mx)$.

Wird das Trägheitsmoment rücksichtlich der Axe OO mit T_o, jenes bezüglich der Schwerpunkts-Axe SS mit T_s bezeichnet und wird beachtet, dass $\Sigma(m x) = 0$ sein müsse, weil die Ebene E durch den Schwerpunkt des Körpers geht (§ 20), und dass $\Sigma(m) = M$ die Körpermasse ist, so folgt der

Lehrsatz $T_o = T_s + M a^2$ . . . . (1

Trägheitsmoment einer Stange.

Liegt die Stangenmittellinie von der Länge l mit der Drehaxe o o (Fig. 71) in einer Ebene, u. zw. gegen letztere geneigt unter dem Winkel α, denkt man ferner die Länge l in viele gleiche Theile von der Länge λ getheilt, so sind $l \sin \alpha$, $(l - \lambda) \sin \alpha$, $(l - 2\lambda) \sin \alpha$ . . . die Abstände dieser Theile von der Axe und ist, falls mit m die Masse der Stange pro Längen-Einheit bezeichnet wird, $m \lambda$ die Masse jedes dieser Stangentheile, mithin ist das gesuchte Trägheitsmoment.

$$T = m \lambda l^2 \sin^2 \alpha + m \lambda (l - \lambda)^2 \sin^2 \alpha + \ldots = m \sin^2 \alpha [\lambda l^2 + \lambda (l - \lambda)^2 + \ldots]$$

oder, (nach § 6, 1. Theil), $T = m \sin^2 \alpha \frac{l^3}{3}$.

Bezeichnet man die Masse der ganzen Stange, d. i. die Masse ml, mit M, so ist $T = \frac{M l^2 \sin^2 \alpha}{3}$, wobei die Stange einen beliebigen Querschnitt besitzen kann.

Ist der genannte Winkel $\alpha = 90°$, rotiert also die Stange um eine zu ihr normale Axe (Fig. 72), so ist

$$T = \frac{M l^2}{3}.$$

Trägheitsmoment eines Kreisringes.

Rotiert dieser Ring von verhältnismäßig geringer radialer Dimension δ um die Axe o o (Fig. 73) und ist r der mittlere Ringhalbmesser, wird ferner der mittlere Kreis von der Länge $2 r \pi$ in viele gleiche Theile getheilt und wird die Masse des zu einem solchen Theile gehörenden Ring-Elements mit m bezeichnet, so ist

$$T = m r^2 + m r^2 + \ldots = M r^2,$$

falls mit $M = \Sigma(m)$ die Masse des ganzen Ringes bezeichnet wird.

Trägheitsmoment einer Kreisscheibe und einer Kreisringscheibe.

Ist r der Radius der durchaus gleich dicken massiven Scheibe und wird deren Masse pro Quadrat-Einheit ihrer Kreisfläche mit m bezeichnet, so denke man diese um ihre geometrische Axe 00 (Fig. 74) rotierende Scheibe in viele concentrische Ringe zerlegt, deren jeder die geringe radiale Breite δ besitzt und welchen die Kreisring-Flächen $2 r \pi \delta$, $2 (r - \delta) \pi \delta$, $2 (r - 2\delta) \pi \delta$ . . . . und mithin die Ring-Massen $2 r \pi \delta m$, $2 (r - \delta) \pi \delta m$ u. s. w. entsprechen.

Das gesuchte Trägheitsmoment T ist gleich der Summe der Trägheitsmomente dieser Ringe, es ist

$$T = 2 r \pi \delta m r^2 + 2(r-\delta) \pi \delta m (r-\delta)^2 + \ldots\ldots \text{ oder}$$

$$T = 2\pi m (\delta r^3 + \delta (r-\delta)^3 + \ldots) \text{ also ist (nach § 6, 1. Theil)}$$

$$T = 2\pi m \frac{r^4}{4} = \frac{(m \pi r^2) r^2}{2} = \frac{M r^2}{2},$$

indem durch $\pi r^2 m$ die Masse M der ganzen Scheibe bestimmt ist.

Das Trägheitsmoment einer Kreisringscheibe von den Radien r und r_1 ergibt sich durch Subtraction der Trägheitsmomente zweier massiver Scheiben von den Radien r und r_1; es ist in diesem Falle

$$T = \frac{m \pi r^4}{2} - \frac{m \pi r_1^4}{2} = \frac{m}{2} \pi (r^2 - r_1^2)(r^2 + r_1^2).$$

Da die der Ringscheibe entsprechende Masse $M = \pi r^2 m - \pi r_1^2 m = m \pi (r^2 - r_1^2)$ ist, so folgt

$$T = \frac{M}{2} (r^2 + r_1^2).$$

Trägheitsmoment eines Voll- und eines Hohl-Cylinders.

Rotieren der gerade Kreis-Cylinder und der gerade Kreisring-Cylinder um ihre geometrischen Axen, so kann man dieselben durch Ebenen normal zu letzteren in viele Scheiben von gleicher Dicke, deren jede die Masse m besitzt, zerlegt denken, dann entspricht die Summe der Trägheitsmomente dieser Kreisscheiben oder dieser Kreisringscheiben beziehungsweise dem Trägheitsmomente T des ersten oder des zweiten Körpers. Es ist, falls die Körpermasse mit M bezeichnet wird,

im ersten Falle $T = \Sigma \left(\frac{m r^2}{2}\right) = \frac{r^2}{2} \Sigma (m) = \frac{M r^2}{2}$,

im zweiten Falle ist $T = \Sigma \left(\frac{m (r^2 + r_1^2)}{2}\right) = \frac{r^2 + r_1^2}{2} \Sigma (m) = \frac{M}{2} (r^2 + r_1^2)$.

Trägheitsmoment eines Schwungrades (näherungsweise Bestimmung).

§ 41. In gewöhnlichen Fällen ist die Radial-Dimension δ (Fig. 72) des Schwungringes verhältnismäßig klein gegenüber der Länge des mittleren Ringradius R, es kann daher für das Ring-Trägheitsmoment T_1 obige Formel in Anwendung gebracht werden, es ist $T_1 = M R^2$. Substituiert man ferner statt jedes der als gerade vorausgesetzten gewöhnlich nicht prismatischen Arme einen prismatischen, dessen Querschnitt gleich dem mittleren Arm-Querschnitt und dessen Länge gleich dem Radius R ist, wobei die Nabe nicht berücksichtigt wird, so ist das Trägheitsmoment eines solchen Armes gleich $\frac{m R^2}{3}$ (§ 40) und jenes aller z Arme ist $T_2 = \frac{z m R^2}{3}$. Wird nun das Gewicht des Ringes mit G, jenes aller Arme zusammen mit G' bezeichnet, so ist $M = \frac{G}{g}$ $z m = \frac{G'}{g}$ und man erhält das gesuchte Trägheitsmoment

$$T = \left(G + \frac{G'}{3}\right) \frac{R^2}{g}.$$

Da für $G' = 0 \cdot 4\, G, 0 \cdot 3\, G, 0 \cdot 2\, G, T = \frac{1 \cdot 13\, G R^2}{g}, \frac{1 \cdot 1\, G R^2}{g}, \frac{1 \cdot 07\, G R^2}{g}$ wird, so bestimmt man häufig in der Praxis das Gewicht G des Ringes allein derart, dass dessen Trägheitsmoment an Stelle jenes des ganzen Schwungrades gesetzt wird, also aus $T = \frac{G R^2}{g}$.

Anwendungen des Schwungrades.

Kommt ein Schwungrad (Schwungring) infolge äußerer Kräfte, welche gewöhnlich auf andere mit dem Schwungrade fix verbundene Maschinentheile (Kurbel oder Rad &c.) wirksam sind von der Winkel-Geschwindigkeit ω_1 auf die Winkel-Geschwindigkeit ω oder, im Kreise vom mittleren Ring-Radius R, von der Umfangs-Geschwindigkeit $c = R\omega_1$ auf jene $v = R\omega$, so ist die Änderung der lebendigen Kraft des Schwungringes

$$\frac{T\omega^2}{2} - \frac{T\omega_1^2}{2} = \frac{G}{2g}(R^2\omega^2 - R^2\omega_1^2) = \frac{G}{2g}(v^2 - c^2).$$

Bleibt die Änderung der lebendigen Kraft der anderen genannten Maschinentheile unberücksichtigt, so ist (nach § 39) die Arbeit A der äußeren Kräfte

$$A = \frac{G}{g}(v^2 - c^2);$$

je nachdem hierbei während der Zeit t zur Änderung der lebendigen Kraft die Arbeit der treibenden Kräfte größer oder kleiner als die Arbeit der Widerstände ist, findet eine Vergrößerung oder eine Verminderung der Schwungring-Geschwindigkeit statt.

Bringt man daher zuerst das Schwungrad auf eine große Umfangs-Geschwindigkeit v, entsprechend einer lebendigen Kraft $\frac{G v^2}{2g}$, so kann letztere ganz oder theilweise bei Überwindung äußerer Widerstände, also Leistung mechanischer Arbeiten, verbraucht werden, das Schwungrad dient in diesem Falle als Arbeits-Ansammler (Accumulator).

Sind v und c beziehungsweise die größte und kleinste und ist $v_0 = \frac{v + c}{2}$ die mittlere Geschwindigkeit während genannter Zeit t, so kann es in einzelnen Fällen wünschenswerth erscheinen, dass während dieser Zeit der sogenannte Gleichförmigkeitsgrad i, d. i. das Verhältnis $i = \frac{v_0}{v - c}$, nicht unter einer gewissen Grenze bleibe; in diesem Falle ist die Arbeit der äußeren Kräfte

$$A = \frac{G}{g}\left(\frac{v + c}{2}\right)(v - c) = \frac{G v_0^2}{g i}$$

und das Schwungrad wirkt als Bewegungs-Ausgleicher (Regulator).

Beispiele.

[1]) Wie groß ist der mittlere Widerstand, welcher bei dem Auswalzen eines 3 *m* langen Metallstabes auftritt, falls zu dieser Arbeit die Änderung der lebendigen Kraft eines Schwungrades verwendet wird, wobei vor dem Beginne und am Ende dieser Arbeit der 12.000 *kg* schwere Schwungring beziehungsweise die Geschwindigkeiten $v = 12\,m$ und $c = 4\,m$ besitzt. Es ist

$$A = P s = \frac{G}{2g}(v^2 - c^2) = \frac{12\,000}{2.9 \cdot 81}(12^2 - 4^2) = 78287\ m\,kg \text{ und}$$

$$P = \frac{78287}{3} = 26096\ kg.$$

2) Ist auf der Antrieb-Welle einer größeren Zahl von Fabrications-Maschinen (z. B. Webstühlen) ein Schwungrad aufgekeilt, so wird sich die dem Betriebe sämmtlicher Maschinen entsprechende Größe c der Ring-Geschwindigkeit bis zur Größe v erhöhen, falls einzelne dieser Maschinen ausgerückt, d. h. in Stillstand versetzt, werden. Wenn nun bekannt ist, dass die während der Zeit $t = 8$ sec. ausgerückt bleibenden Arbeitsmaschinen höchstens $N = 6$ *HP.* repräsentieren können und gewünscht wird, dass die Antriebwelle nahezu gleichförmig, also der genannte Schwungring mit einer zwischen v und c liegenden gegebenen mittleren Geschwindigkeit $v_0 = 10\,m$ bei einem gleichfalls gegebenen Gleichförmigkeitsgrade $i = 30$ continuierlich rotiere, wie bestimmt man das nur dieser Bedingung entsprechende Gewicht des Schwungringes? Es ist

$$A = 75\,N\,t = \frac{G\,v_0^2}{g\,i}, \text{ woraus gefunden wird}$$

$$G = \frac{75.g\,i\,N\,t}{v_0^2} = \frac{75.9{\cdot}81.30.6.8}{10^2} = 10595\ kg.$$

Reducierte Masse, Trägheitshalbmesser.

§ 42. Soll ein rotierender Körper mit dem Trägheitsmomente T durch einen zweiten mit dem Trägheitsmomente T' derart ersetzt werden, dass in jedem Bewegungs-Augenblicke sowohl das (resultierende) Drehkraft-Moment als auch die Winkel-Beschleunigung ε wechselweise gleich sind, so müssen, da das

$$\text{Drehkraft-Moment } \varepsilon T = \varepsilon T'$$

ist, die beiden Trägheits-Momente T und T' einander gleich sein. In diesem Falle erlangen beide Körper bei der Bewegung von der Ruhe aus nach irgend einer Zeit einerlei Winkel-Geschwindigkeit ω und auch einerlei lebendige Kraft, denn es ist $\frac{T\omega^2}{2} = \frac{T'\omega^2}{2}$.

Soll insbesonders der genannte Körper mit dem Trägheitsmomente T durch einen im Abstande ρ von der Drehaxe befindlichen materiellen Punkt (Kleinkörper), dessen Masse m ist, ersetzt werden (Fig. 68), so ist das Punkt-Trägheitsmoment gleich $m\rho^2$ und mithin ist $T = m\rho^2$; die Masse $m = \frac{T}{\rho^2}$ nennt man die auf den Abstand ρ reducierte Masse des Körpers; dieselbe kann man sich auch auf einen materiellen Kreis-Cylinder (dünnen Kreisring), vom Radius ρ und Trägheitsmomente $m\rho^2$, vertheilt denken.

Reduciert man nach statischem Gesetze das Drehkraft-Moment auf denselben Abstand ρ, so ergibt sich eine auf den Punkt von der Masse m wirkende Drehkraft P und es ist der Fall der Körper-Bewegung auf jenen einer Punkt-Bewegung zurückgeführt, man kann also wieder die einfachen Formeln $P = mp$ für die Kraftgröße, $A = \frac{m}{2}(v^2 - c^2)$ für die Aenderung der lebendigen Kraft, $Pt = m(v - c)$ für die Aenderung der Bewegungsgröße ꝛc. verwenden, wobei sich die Beschleunigung p und die Geschwindigkeiten v und c auf den Kreis vom Radius ρ beziehen.

In dem besonderen Falle, in welchem die reducierte Masse m gleich jener M des rotierenden Körpers ist, nennt man den nun entsprechenden Axial-Abstand $\rho = \sqrt{\frac{T}{M}}$ den Trägheits-Halbmesser.

Beispiele.

1) Über eine Rolle vom Radius r und Gewichte G (Fig. 40), welche nahe an ihren beiden Planflächen mittelst Zapfen vom Radius ϱ gelagert ist, sei eine vollkommen biegsame Schnur geschlungen, an deren Enden die Gewichte $P > Q$ befestigt sind. Wie groß ist die Beschleunigung p des sinkenden Gewichtes P, falls auch die Masse der massiven Rolle sowie die Zapfen-Reibung berücksichtigt wird (φ Reibungs-Coefficient).

Rechnet man zuerst ohne Rücksicht auf die Zapfenreibung, so ist das Trägheitsmoment der rotierenden Scheibe $\frac{M r^2}{2} = \frac{G r^2}{2 g}$ und mithin ist die auf den Abstand r reducierte Scheibenmasse $m = \frac{G}{2 g}$, also ergibt sich rücksichtlich der im gleichen Abstande r wirkenden Kräfte P, Q und bewegten Massen $\frac{P}{g}$, $\frac{Q}{g}$ und $\frac{G}{2 g}$ die Beschleunigung $p = \frac{(P-Q) g}{P+Q+\frac{G}{2}}$. In § 21 (Beispiel 5) wurden für diesen Fall die Schnur-Spannungen $S = P\left(1-\frac{p}{g}\right)$ u. $S' = Q\left(1+\frac{p}{g}\right)$ bestimmt, sonach ist während der Bewegung der Druck auf die Zapfen $N = G + S + S'$; da nun die vom Abstande ϱ auf den Abstand r nach statischem Gesetze reducierte Zapfenreibung die Größe $\varphi N \frac{\varrho}{r}$ hat, so ergibt sich genauer die

$$\text{Beschleunigung } p = \frac{\left(P - Q - \varphi N \frac{\varrho}{r}\right) g}{P + Q + \frac{G}{2}}.$$

2) Ein Schwungrad vom Ringradius R und Gewichte Q soll durch ein anderes von gleicher Wirksamkeit jedoch mit einem größeren Ringradius $R' = \frac{5}{4} R$ ersetzt werden, wobei in beiden Fällen das Verhältnis zwischen dem Ringgewichte G und dem Gewichte G' der geraden Radarme das gleiche ist. Wie groß ist das Gewicht Q' des zweiten Rades?

Für $G' = n G$ ist das Gewicht des ersten Rades $Q = G + G' = G(1+n)$, das Trägheitsmoment desselben ist annähernd $T = \left(G + \frac{G'}{3}\right) \frac{R^2}{g} = \left(1 + \frac{n}{3}\right) \frac{R^2 G}{g}$, oder durch Substitution von $G = \frac{Q}{1+n}$, $T = \left(\frac{3+n}{3+3n}\right) \frac{R^2 Q}{g}$.

Durch Vertauschung von R mit R' und Q mit Q' ergibt sich das Trägheitsmoment T' des zweiten Rades und da $T = T'$ sein muss, so folgt:

$$R^2 Q = R'^2 Q', \text{ woraus } Q' = \left(\frac{R}{R'}\right)^2 Q = \frac{16}{25} Q \text{ bestimmt wird.}$$

Schwingende Bewegung eines Körpers infolge der Schwerkraft.

§ 43. Befindet sich der um die horizontale Axe 00 drehbare Körper (Fig. 75) vom Gewichte G und Schwerpunkte s in der Lage II und wird der Winkel, den die Ebene E durch s und 00 mit ihrer ursprünglich verticalen Lage E_0 bildet, d. i. der Ausschlagwinkel, mit α, sowie ferner der Abstand s bis 00 mit r bezeichnet, so unterliegt der Körper in dieser Lage der Wirkung des Drehkraft-Momentes $G r \sin \alpha$ und besitzt daher eine Winkel-Beschleunigung $\varepsilon = \frac{G r \sin \alpha}{T}$, (T Trägheitsmoment).

Sich selbst überlassen gelangt er infolge des veränderlichen Gewichts-Momentes $G r \sin \alpha$, bei stets abnehmender Winkel-Beschleunigung ε und zunehmender Winkel-Geschwindigkeit ω, in die tiefste Lage I, besitzt dort eine gewisse lebendige Kraft

$\frac{T\omega^2}{2}$, schwingt infolge dessen über diese Lage hinaus u. s. w. Frägt man um die Länge l eines substituierten mathematischen Pendels (Fig. 75a), dessen materieller schwingender Punkt i von der Masse m auf der Linie des Abstandes r derart liegend gedacht wird, dass, wenn er für sich allein als materieller Punkt des mathematischen Pendels schwingen würde, seine Bewegung die gleiche wäre wie jene, die er als Punkt des schwingenden Körpers oder physicalischen Pendels besitzt, so ist diese Länge dadurch bestimmt, dass der genannte Punkt in beiden Schwingungs-Fällen bei demselben Ausschlagwinkel α auch einerlei Umfangs-Beschleunigung p besitzen müsse. Im ersten Falle wirkt in dieser Lage auf den materiellen Punkt vom Gewichte mg die Tangentialkraft $m g \sin\alpha$, mithin ist die Beschleunigung $p = \frac{m g \sin\alpha}{m} = g \sin\alpha$, im zweiten Falle ist die Beschleunigung $p = \varepsilon l = \frac{G r \sin\alpha\, l}{T}$; aus $g \sin\alpha = \frac{G r \sin\alpha\, l}{T}$ folgt $l = \frac{T g}{G r} = \frac{T}{M r}$, (M Körpermasse).

Dieser im Abstande l auf der genannten Linie liegende Punkt i wird der Schwingungspunkt des physicalischen Pendels genannt.

Die Zeit t zu einer Schwingung dieses Pendels ist übereinstimmend mit jener rücksichtlich jedes seiner Punkte, z. B. des Punktes i, also auch mit jener des substituierten mathematischen Pendels; mithin ist (nach § 11)

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \pi \sqrt{\frac{T}{G r}}.$$

Nach dieser Formel könnte das Trägheitsmoment T des schwingenden Körpers bestimmt werden, falls dessen Gewicht G und Schwerpunkts-Abstand r bekannt sind und die Schwingungszeit t beobachtet wird.

Läſst man denselben Körper derart schwingen, dass die horizontale Schwingungsaxe durch den Punkt i geht, so ist die nun entsprechende Länge des substituierten mathematischen Pendels, falls das neue Trägheitsmoment mit T' bezeichnet wird, $l' = \frac{T'}{M(l-r)}$.

Drückt man, nach dem Lehrsatze rücksichtlich zweier Parallel-Axen (§ 40), die Trägheitsmomente T und T' durch jenes T_s bezüglich einer durch den Schwerpunkt s gelegten Parallel-Axe aus, so ist die frühere Länge

$$l = \frac{T}{Mr} = \frac{T_s + M r^2}{M r} = \frac{T_s}{M r} + r \text{ oder } l - r = \frac{T_s}{M r},$$

$l' = \frac{T_s + M(l-r)^2}{M(l-r)} = \frac{T_s}{M(l-r)} + l - r$, obiger Wert für $l - r$ in den Nenner substituiert, gibt $l' = l$.

Die Zeit zu einer Schwingung $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ bleibt also ungeändert, falls die Drehaxe o o durch eine andere parallele den Schwingungspunkt i enthaltende Schwingungsaxe ersetzt wird (Reversionspendel).

Zusammengesetzte geradlinig fortschreitende und drehende Bewegung.

§ 44. Die Drehaxe enthalte den Schwerpunkt o des Körpers. Aus den in § 21 und § 39 erörterten Gesetzen folgt, dass, wenn ein Körper von der Masse M und dem Trägheitsmomente T gleichzeitig sowohl eine Rückungs-Beschleunigung q in gegebener Richtung of als auch eine Winkel-Beschleunigung ε bei gegebener Drehaxe oX besitzt, sich die äußeren Kräfte K, S . . . . derart in Componenten zerlegen

lassen müssen, dass letztere durch eine in o angreifende Einzelnkraft $Q = q M$ und ein resultierendes Kräftepaar vom Drehmomente $P r = \varepsilon T$ ersetzt werden können, wobei die Arbeitssumme A der Kräfte K, S . . . gleich der Summe der Arbeiten ihrer Componenten und mithin gleich der Rückungsarbeit A_1 der Kraft Q mehr der Dreharbeit A_2 der Kraft P ist. $A = A_1 + A_2$.

Bewegt sich der Körper von der Ruhe aus und besitzt er nach irgend einer Zeit die Rückungs-Geschwindigkeit c und die Winkel-Geschwindigkeit ω, so wurde rücksichtlich der fortschreitenden Bewegung eine Arbeit $\frac{M c^2}{2}$ und rücksichtlich der drehenden Bewegung eine Arbeit $\frac{T \omega^2}{2}$ geleistet, mithin ist $A = \frac{M c^2}{2} + \frac{T \omega^2}{2}$, und man kann (nach §§ 37, 39) folgern, dass die am Ende dieser Zeit erlangte lebendige Kraft des Körpers bezüglich der zusammengesetzten Bewegung gleich der Summe der lebendigen Kräfte rücksichtlich beider Einzeln-Bewegungen ist.

Genauere Begründung. Ordnet man ein rechtwinkliges Coordinatensystem o X Y Z (Fig. 76) mit dem Ursprunge in o so an, dass dessen eine Axe die Drehaxe o X ist und die zweite o Y in der durch o X und die Rückungs-Richtung o f bestimmten Ebene liegt, so ist ein Punkt i des Körpers durch seine Coordinaten x, y, z bestimmt, sein Abstand von der Drehaxe sei ϱ, seine beiden gleichzeitig erlangten Geschwindigkeiten sind $c // o f$ und $\varrho \omega \perp \varrho$. Bezeichnet man den Winkel (o X, o f,) mit α, den $\sphericalangle (\varrho, z)$ mit δ und wird die Geschwindigkeit c in den Richtungen o X, o Y und die Geschwindigkeit $\varrho \omega$ parallel zu o Y, o Z zerlegt, so ergeben sich drei zu einander normale Geschwindigkeiten und es ist die resultierende Geschwindigkeit o des Punktes i bestimmt durch

$$v^2 = (c \cos \alpha)^2 + (c \sin \alpha \pm \varrho \omega \cos \delta)^2 + (\varrho \omega \sin \delta)^2.$$

Für $\cos \delta = \frac{z}{\varrho}$, $\sin \delta = \frac{y}{\varrho}$ und $y^2 + z^2 = \varrho^2$ folgt

$$v^2 = (c \cos \alpha)^2 + (c \sin \alpha \pm z \omega)^2 + (y \omega)^2 = c^2 \pm 2 c \ z \omega \sin \alpha + (\varrho \omega)^2$$

und, falls mit m die Masse dieses materiellen Punktes bezeichnet wird,

$$\frac{m v^2}{2} = \frac{m c^2}{2} \pm c \ (m z) \ \omega \sin \alpha + \frac{m (\varrho \omega)^2}{2}.$$

In gleicher Art ergibt sich auch für jeden anderen Punkt eine solche Relation. Addiert man diese Gleichungen, so ist

$$\Sigma \left(\frac{m v^2}{2} \right) = \Sigma \left(\frac{m c^2}{2} \right) \pm \Sigma \left[c \ (m z) \ \omega \sin \alpha \right] + \Sigma \left[\frac{m (\varrho \omega)^2}{2} \right].$$

Da $c \omega \sin \alpha$ eine constante Größe und, nach dem Schwerpunkts-Momentenlehrsatze bezüglich der Ebene o X Y, $\Sigma (m z) = M . 0 = 0$ ist, so folgt $\Sigma [c \ (m z) \ \omega \sin \alpha] = c \omega \sin \alpha \ \Sigma (m z) =$ Null; ferner ist $\Sigma \left(\frac{m c^2}{2} \right) = \frac{M c^2}{2}$, $\Sigma \left[\frac{m (\varrho \omega)^2}{2} \right] = \frac{T \omega^2}{2}$, also ist die lebendige Kraft des Körpers rücksichtlich der zusammengesetzten Bewegung.

$$\Sigma \left(\frac{m v^2}{2} \right) = \frac{M c^2}{2} + \frac{T \omega^2}{2}.$$

Bewegt sich der Körper nicht von der Ruhe aus, so ist, falls mit c, ω die Anfangs-Geschwindigkeiten und mit c_1, ω_1 die End-Geschwindigkeiten bezeichnet werden

$$A = \left(\frac{M c_1^2}{2} - \frac{M c^2}{2} \right) + \left(\frac{T \omega_1^2}{2} - \frac{T \omega^2}{2} \right) = \left(\frac{M c_1^2}{2} + \frac{T \omega_1^2}{2} \right) - \left(\frac{M c^2}{2} + \frac{T \omega^2}{2} \right),$$

d. h. die (algebraische) Summe der Arbeiten der Kräfte K, S . . . . . ist gleich der durch dieselbe hervorgerufenen Änderung der lebendigen Kraft des Körpers bezüglich der genannten zusammengesetzten Bewegung.

Allgemeinster Fall der Körper-Bewegung.

Schwerpunkts-Gesetz.

§ 45. In der geometrischen Bewegungslehre wurde begründet, daſs jede Bewegung eines frei beweglichen Körpers durch eine ununterbrochene Aufeinanderfolge von momentanen Rückungs-Drehungs-Bewegungen ersetzt werden kann, wobei für jede solche kleine zusammengesetzte Bewegung die Drehaxe durch den Schwerpunkt des Körpers geht, so daſs letzterer nur an der Aufeinanderfolge der Rückungs-Bewegungen theil nimmt (§ 17).

Denkt man rücksichtlich irgend eines Bewegungs-Zeitmomentes die im allgemeinen verschieden gerichteten in beliebigen Punkten des Körpers angreifenden äußeren Kräfte K, S .... mittelst Kräftepaare parallel zu sich an den Schwerpunkt o des Körpers verschoben, so geben die Kräftepaare ein resultierendes Paar zur Dreh-Bewegung und die Parallelkräfte K′, S′ .... eine Resultante Q zur Rückungs-Bewegung. Da nun die Rückungs-Beschleunigung des Körpers von der Masse M gleich $\frac{Q}{M}$ zugleich die Beschleunigung des Punktes o ist, so folgt:

Der Schwerpunkt des Körpers bewegt sich so, wie ein an seiner Stelle befindlicher frei beweglicher materieller Punkt, dessen Masse gleich jener des Körpers ist und auf welchen Kräfte K′S′ ... wirken, die den gegebenen KS ... der Richtung und Größe nach gleich sind.

Gesetz der lebendigen Kraft.

Da die Bewegung jedes der Körperpunkte eine continuierliche, also die Geschwindigkeit irgend eines derselben am Ende einer solchen Rückungs-Drehungs-Periode gleich seiner Geschwindigkeit am Beginne der nächsten Periode ist, so ist die lebendige Kraft des Körpers am Ende der einen zusammengesetzten Bewegung gleich jener zu Beginn der nächsten Rückung-Drehung. Bezeichnet man mit L die lebendige Kraft am Beginne der Bewegung und mit L_1 L_2 .... L_n die lebendigen Kräfte des Körpers am Ende der auf einander folgenden kleinen Bewegungs-Zeittheile, so sind $L_1 - L$, $L_2 - L_1$, ... $L_n - L_{n-1}$ die auf einander folgenden Änderungen der lebendigen Kraft des Körpers, welchen beziehungsweise die Arbeitssummen a_1, a_2 .... der Kräfte K, S ... entsprechen (§ 44). Die Gesammtarbeit der letzteren während der ganzen Bewegung ist $A = a_1 + a_2 + \ldots = (L_1 - L) + (L_2 - L_1) + \ldots + (L_n - L_{n-1})$ oder $A = L_n - L$, d. h. die algebraische Summe der Arbeiten der äußeren Kräfte K, S ... ist gleich der durch dieselben hervorgerufenen Änderung der lebendendigen Kraft des frei beweglichen Körpers, mag die Bewegung des letzteren wie immer beschaffen sein.

Ist der Körper nicht frei beweglich, so kann der betreffende Bewegungsfall, durch Substituierung von den Bedingungen der zwangsläufigen Bewegung entsprechenden Kräften, auf einen Fall der Bewegung des frei beweglichen Körpers zurückgeführt werden.

Beispiele.

1) Wie groß ist die Beschleunigung p und die Endgeschwindigkeit v eines auf einer schiefen Ebene von der Neigung α in Folge seines Gewichtes G herab rollenden Cylinders und wie groß darf dieser Winkel höchstens sein, falls kein Gleiten eintreten soll. (Fig. 77.)

Da der Schwerpunkt o in der Richtung normal zur Bahn keine Bewegung besitzt, so muss der Bahn-Normaldruck N gleich der Gewichts-Componente $G \cos \alpha$ sein. Ursache der Drehung ist die Gleit-Reibung $\varphi N = \varphi G \cos \alpha$ (φ Reib. Coeff.), wirksam im Abstande r von der Drehaxe, und es ist das Drehkraft-Moment $\varphi G \cos \alpha\, r = T \varepsilon$, ($T$ Trägheitsmoment des Körpers).

Der Cylinder bewegt sich wie ein frei beweglicher Körper, auf welchen die in o angreifende constante Kraft $G \sin \alpha$ und die gleichfalls constante Drehkraft, $G \cos \alpha = \frac{T \varepsilon}{r}$, wirken. Verschiebt man letztere an den Punkt o, so ist nach dem früheren Schwerpunkts-Gesetze, die Schwerpunkts-Beschleunigung $p = \frac{G \sin \alpha - \frac{T \varepsilon}{r}}{M}$, (M Körpermasse).

Soll kein Gleiten eintreten, so müssen die gleichzeitig zurückgelegten Wege, welche der constanten Rückungs-Beschleunigung p und der constanten Umfangs-Beschleunigung $r \varepsilon$ des Bahnpunktes α entsprechen, einander gleich sein. Aus

$$\frac{p t^2}{2} = \frac{(r \varepsilon) t^2}{2} \text{ folgt, } \varepsilon = \frac{p}{r}. \text{ Für } M = \frac{G}{g} \text{ und } T = \frac{M r^2}{2} \text{ ist}$$

$$p = \left(G \sin \alpha - \frac{G p}{2 g}\right) : \frac{G}{g}, \text{ und daraus } p = \frac{2}{3} g \sin \alpha.$$

Weiters wird $\varepsilon = \frac{p}{r} = \frac{2 g \sin \alpha}{3 r}$, und mithin ist das Drehkraft-Moment

$$T \varepsilon = \frac{G r^2}{2 g} \cdot \frac{2 g \sin \alpha}{3 r} = \varphi G \cos \alpha\, r, \text{ woraus man bestimmt, } \operatorname{tang} \alpha = 3 \varphi.$$

Ist der Weg s, welcher der Beschleunigung p entspricht, gleich der Länge der schiefen Ebene und besitzt letztere die Höhe h, so folgt aus $\frac{v^2}{2 p} = \frac{3 v^2}{4 g \sin \alpha} = s$, $v = \sqrt{\frac{4}{3} g s \sin \alpha} = \sqrt{2 g \cdot \frac{2}{3} h}$; d. h. die Endgeschwindigkeit v ist ebenso groß wie diejenige, welche der Cylinder erlangt, falls er von der Höhe $\frac{2}{3}$ h frei herab fällt.

Mit Berücksichtigung der Roll-Reibung erhalten die Beschleunigung p und die Geschwindigkeit v etwas kleinere als die berechneten Größen.

2) Welche Geschwindigkeit v erlangt der auf der geraden Schienenbahn einer schiefen Ebene infolge seines Gewichtes herabrollende Wagen (Fig. 78) am Ende seines Weges s, falls das Gesammtgewicht der rollenden Körper (Räder) gleich G ist und der übrige Theil des Wagens das Gewicht Q hat. Bei welchem Bahn-Gefälle wird die Bewegung eine gleichförmige?

Auch hier können die Gesetze des allgemeinsten Bewegungsfalles angewendet werden, sobald man nebst den Kräften G und Q auch den auf den Umfang der Räder reducierten Reibungs-Widerstand W in Rechnung zieht.

Wird berücksichtigt, dass hier, so wie im früheren Falle, die gleichzeitig zurückgelegten Wege des Radumfangspunktes und des Radmittels gleich groß sind, dass also — diese Zeit als kleine Zeiteinheit gedacht — für jede Stellung des Wagens die Rad-Umfangsgeschwindigkeit und die Wagen-Geschwindigkeit gleich groß sein müssen, falls kein Gleiten eintreten soll, so ist die erlangte lebendige Kraft der drehenden Bewegung $\frac{T \omega^2}{2} = \frac{m v^2}{2}$, wobei $m = \frac{T}{r^2}$ die auf den Abstand r reducierte Masse der Räder vom Gesammt-Trägheitsmomente T ist.

Setzt man $\frac{G}{g} = M$ und $\frac{Q}{g} = M'$, so ist die erlangte lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung gleich $(M + M') \frac{v^2}{2}$. Mit Anwendung des zweiten der oben begründeten Lehrsätze ergibt sich die (algebraische) Summe der Arbeiten der äußeren Kräfte

$$(G + Q) h - W s = (M + M') \frac{v^2}{2} + \frac{m v^2}{2}, \text{ woraus folgt}$$

$v^2 = \frac{2(G+Q)h - 2Ws}{M+M'+m}$. Da sämmtliche Kräfte constante sind, so ist die Beschleunigung des Wagens $p = \frac{v^2}{2s}$. Ist ϱ der Zapfen-Halbmesser der Räder vom Radius r, so ist die auf den Rad-Umfang reducierte Zapfen-Reibung gleich $\varphi Q \frac{\varrho}{r}$ und die Roll-Reibung ist gleich $\frac{k}{r}(G+Q)$, (k Rollreib.-Coeff.); mithin ist zu setzen $W = \varphi Q \frac{\varrho}{r} + \frac{k}{r}(G+Q)$.

Zur Bestimmung desjenigen Gefälls-Verhältnisses $\frac{h}{s}$, bei welchem die Bewegung des Wagens eine gleichförmige wird, folgt aus

$p = \frac{v^2}{2s}$ = Null, $(G+Q)\frac{h}{s} = W$, und durch Substitution des Wertes für W

$$\frac{h}{s} = \frac{\varphi\varrho}{r}\left(\frac{Q}{G+Q}\right) + \frac{k}{r}.$$

Für $\varphi = 0{\cdot}01$, $\frac{\varrho}{r} = \frac{1}{10}$, $Q = 8\,G$, $\frac{k}{r} = 0{\cdot}001$ wird $\frac{h}{s} = \frac{1}{500}$.

Beachtet man, dass die reducierte Masse m der rollenden Körper kleiner als deren wirkliche Masse $\frac{G}{g}$ und dass das Gewicht G nur ein kleiner Theil des Wagen-Gewichtes $(G+Q)$ ist, so ergibt sich, dass diese Masse m unberücksichtigt bleiben kann und dass auf die Bewegung des Wagens unmittelbar die Gesetze der geradlinig fortschreitenden Bewegung in Anwendung gebracht werden können, wie dieses in § 37, Beisp. 2, geschah.

Gesetz der virtuellen Geschwindigkeiten.

§ 46. Befinden sich an einem Körper oder an einer fixen Verbindung mehrerer Körper die äußeren Kräfte P, Q .... im Gleichgewichte und denkt man eine (mögliche) so kleine Bewegung des ganzen Systems materieller Punkte vorgenommen, dass auch bezüglich der neuen Lage der Kraft-Angriffspunkte der Gleichgewichtszustand der an Richtung und Größe ungeänderten Kräfte vorausgesetzt werden kann, so ergibt sich, — da die Geschwindigkeiten der materiellen Punkte am Anfange und am Ende der Bewegung gleich Null sind —, dass die Änderung der lebendigen Kraft des Punktsystems während der kleinen Bewegungszeit und mithin auch die (algebraische) Summe der Arbeiten der Kräfte P, Q .... gleich Null ist; bezeichnet man die Projectionen der kleinen Angriffspunkt-Wege auf die Linien der Kräfte P, Q .... mit p, q ...., und die kleine Bewegungszeit mit t, so ist

$$Pp + Qq + \ldots = 0 \text{ und auch } P\frac{p}{t} + Q\frac{q}{t} + \ldots = 0.$$

Die Quotienten $\frac{p}{t}, \frac{q}{t} \ldots$ sind Geschwindigkeiten. In der Voraussetzung $t = 1$ benennt man unmittelbar die Weg-Projectionen p, q .... als virtuelle Geschwindigkeiten und die Producte Pp, Qq .... als virtuelle Momente. Es folgt: Die (algebraische) Summe der virtuellen Momente der sich das Gleichgewicht haltenden Kräfte ist gleich Null.

Beispiel

Unter welcher Bedingung halten sich die beiden Gewichte G, G' der auf den zwei schiefen Ebenen von den Neigungen α, α' (Fig. 79) befindlichen Körper mit Rücksicht auf die Gleit-Reibung das Gleichgewicht?

Die zu den schiefen Ebenen parallel und normal gerichteten Gewichts-Componenten sind $G\sin\alpha$, $G'\sin\alpha'$ und $G\cos\alpha$, $G'\cos\alpha'$. Denkt man eine kleine Bewegung im Sinne

des Pfeiles 1 eingeleitet, so erscheinen bezüglich der treibenden Kraft $G \sin \alpha$, die Componente $G' \sin \alpha'$ und die Reibungen $\varphi G \cos \alpha$, $\varphi G' \cos \alpha'$ als Widerstände; da nun in diesem Falle, infolge fester Verbindung beider Körper, deren Schwerpunkte (Kraftangriffspunkte) denselben Weg s zurücklegen würden, so folgt nach obigem Lehrsatze

$$G \sin \alpha\, s - \varphi G \cos \alpha .\, s - \varphi G' \cos \alpha' .\, s - G' \sin \alpha' .\, s = 0$$ oder

$$\frac{G}{G'} = \frac{\sin \alpha' + \varphi \cos \alpha'}{\sin \alpha - \varphi \cos \alpha}.$$

Der Bewegung im Sinne des Pfeiles 2 entspräche, bei Vertauschung von G und G', α und α', ebenso das Verhältnis

$$\frac{G'}{G} = \frac{\sin \alpha + \varphi \cos \alpha}{\sin \alpha' - \varphi \cos \alpha'}.$$

So lange $\frac{G}{G'}$ innerhalb der Grenzen $\frac{\sin \alpha' + \varphi \cos \alpha'}{\sin \alpha - \varphi \cos \alpha}$ und $\frac{\sin \alpha' - \varphi \cos \alpha'}{\sin \alpha + \varphi \cos \alpha}$ liegt, wird die Reibung eine wirkliche Bewegung verhindern.

Stoß der Körper.

§ 47. Bewegen sich zwei Körper oder nur einer derselben derart, dass beide zusammentreffen, wobei im Momente ihrer Berührung die Bewegungszustände der materiellen Punkte des einen verschieden sind von jenen des anderen Körpers, so entsteht eine Wechselwirkung zwischen beiden, welche mit dem Namen **Stoß** bezeichnet wird. Es tritt nämlich, da beide Körper „undurchdringlich" sind, eine nur sehr kurze Zeit (**Stoßzeit**) dauernde ununterbrochene Aufeinanderfolge von Änderungen der genannten Punkt-Bewegungszustände sowie von Änderungen der Formen oder Gestalten beider Körper ein, wodurch die Annahme von dem „Principe der Wechselwirkung" entsprechenden, also entgegengesetzt gleichen Kräften (**Stoßkräften**) bedingt ist (§ 18).

Da sonach jeder der zwei Körper während der kleinen Stoßzeit nicht ein System von in gegenseitig unveränderlichen Abständen befindlichen materiellen Punkten bildet, so können bisher erörterte Gesetze, welche auf dieser Voraussetzung basieren, im vorliegenden Bewegungsfalle nur dann angewendet werden, wenn man sich diese Zeit in so viele auf einander folgende Zeitmomente zerlegt denkt, dass während irgend eines dieser Zeittheilchen die Formen beider Körper als ungeändert bleibend vorausgesetzt werden können.

Ist, rücksichtlich irgend eines dieser Stoßzeit-Momente, E die gemeinschaftliche Berührungsebene der beiden Körper A, B (Fig. 80), so müssen die zwei nach dem Principe der Wechselwirkung **entgegengesetzt gleichen** in derselben Kraftlinie N wirksamen Stoßkräfte k, k' **normal zur Ebene E** gerichtet sein, denn anderenfalls könnte man jede derselben in zwei zu einander senkrechte Componenten zerlegen, wovon die Wirkung der beiden **in** die Ebene E fallenden gleich Null wäre.

Ist bei dem Zusammentreffen der Körper die Bewegungs-Richtung beider Schwerpunkte o, o' zugleich die Richtung dieser Normale (Fig. 81, 82), so nennt man den Stoß einen **geraden**; gilt dieses rücksichtlich keines oder nur eines der beiden Schwerpunkte, so entsteht ein **schiefer** Stoß (Fig. 80). Der Stoß wird ferner ein **centraler** Stoß genannt, falls bei dem Zusammentreffen der Körper die gerade Verbindungslinie der Punkte o, o' **in** die Normale N fällt (Fig. 82); enthält diese Normale nur einen oder keinen der Schwerpunkte, so entsteht ein **excentrischer** Stoß.

Besitzen in keinem der Stoßzeit-Momente die inneren Kräfte (Elasticitäts-Widerstände)*) der Körper die Fähigkeit, das Fortschreiten der Deformation zu verhindern, ist also die schließlich erlangte Formänderung, u. zw. nach Fig. 82 die Zusammendrückung der Körper A, B, eine bleibende, so zählt man bekanntlich diese Körper zu den unelastischen und man nennt auch diesen Stoß einen unelastischen. Verschwindet hingegen die während des ersten Theiles der Stoßzeit erlangte Deformation im Verlaufe des zweiten Zeittheiles wieder vollständig oder nur theilweise, sind also diese Körper als elastische oder als unvollkommen elastische zu betrachten, so nennt man auch den Stoß beziehungsweise einen elastischen oder einen unvollkommen elastischen. Es hängt nicht bloß vom Materiale und von der Gestalt der Körper, sondern auch von der Größe der hier als wirksam angenommenen äußeren Kräfte (Stoßkräfte), d. i. von der Stärke des Stoßes ab, ob letzterer als ein unelastischer, elastischer oder unvollkommen elastischer zu betrachten ist, wobei unter dieser Kraftgröße die mittlere Größe der während der sehr kurzen Stoßzeit im allgemeinen veränderlichen Kräfte k, k' zu verstehen ist.

Gerader centraler Stoß.

In diesem Falle (Fig. 82) ist während der kleinen Stoßzeit die Richtung der Normale N zugleich die Bewegungs-Richtung der Punkte beider Körper und die genannte Aufeinanderfolge von Bewegungszustands-Änderungen besteht daher in einer Aufeinanderfolge von Geschwindigkeits-Änderungen. Die vom Körper A ausgehende auf den Körper B wirkende Kraft k ist während jedes der Stoßzeit-Momente entgegengesetzt gleich der vom Körper B ausgehenden auf den Körper A wirkenden Kraft k', es ist also rücksichtlich irgend eines dieser Zeittheilchen von der Größe τ der Kraftantrieb $k\tau$ gleich jenem $k'\tau$, und da nun, nach dem früher Gesagten, das in § 38 erörterte Gesetz vom „Kraftantriebe bei fortschreitend bewegten Körpern" auf den vorliegenden Fall angewendet werden kann, so ergibt sich, dass auch die „Änderungen der Bewegungsgrößen beider Körper während dieses Zeittheilchens einander gleich sein müssen." Dieses Gesetz gilt rücksichtlich jedes dieser Zeitmomente, also ist die während aller dieser Momente, d. h. die während der Stoßzeit erlangte Änderung der Bewegungsgröße des Körpers A gleich der Änderung der Bewegungsgröße des Körpers B. Besitzen also diese Körper von den Massen M und m am Anfange der Stoßzeit beziehungsweise die Geschwindigkeiten C und c, wobei $C > c$ ist, und am Ende dieser Zeit die Geschwindigkeiten V und v, so ist, da die Kraft k in der Bewegungsrichtung und k' entgegengesetzt derselben wirkt, also der Körper A einen Geschwindigkeits-Verlust und jener B einen Geschwindigkeits-Gewinn erlangt,

$$MC - MV = mv - mc \text{ oder } MC + mc = MV + mv \quad \ldots\ldots (1$$

d. h. die Summe der Bewegungsgrößen beider Massen vor dem Stoße ist gleich jener nach dem Stoße.

Gerader centraler, unelastischer Stoß.

§ 48. Nach dem oben Gesagten kann in diesem Falle die am Beginne der Stoßzeit stattfindende Deformation, d. i. die Zusammendrückung der Körper A und B, während

*) Vergl. Erster Theil, § 2.

dieser Zeit nur eine Vergrößerung und keine Verminderung erfahren; diese Körper besitzen also am Ende dieser Zeit die größte Deformation und bewegen sich von da an wie ein Körper, also mit einer gemeinschaftlichen Geschwindigkeit d. i. mit jener ω ihres gemeinschaftlichen Schwerpunktes weiter; es ist also $V = v = \omega$ und mithin (aus Gleichung (1).

$$\omega = \frac{MC + mc}{M + m} \quad \dots . (2$$

Der Körper A erfährt einen Geschwindigkeitsverlust $C - \omega$ und der Körper B einen Geschwindigkeits-Gewinn $\omega - c$ infolge des Stoßes.

Von der lebendigen Kraft $A = \frac{MC^2}{2} + \frac{mc^2}{2}$, welche beide Körper zusammen vor dem Stoße besitzen, geht zur Herstellung ihrer Deformation und zur Erzeugung von Wärme- und Schall-Schwingungen ein Theil A_1 verloren (Deformations-Arbeit). Da beide Körper zusammen nach dem Stoße die lebendige Kraft $A_2 = (M + m)\frac{\omega^2}{2}$ besitzen, so folgt aus

$$A = A_1 + A_2$$

$A_1 = \frac{MC^2}{2} + \frac{mc^2}{2} - (M + m)\frac{\omega^2}{2}$, nach Substitution der Größe $\omega = \frac{MC + mc}{M + m}$ und entsprechender Reduction wird

$$A_1 = \frac{Mm}{2(M + m)}(C - c)^2 \quad \dots\dots (3$$

Bewegen sich beide Körper vor dem Stoße in entgegengesetzter Richtung, so ist in den Relationen 1) 2) 3) die Geschwindigkeit c negativ zu nehmen.

Besonderer Fall des unelastischen Stoßes.

Ruht der Körper B vor dem Stoße, so ist c gleich Null und mithin

$$\omega = \frac{MC}{M + m}, \quad A = \frac{MC^2}{2}, \quad A_1 = \frac{MmC^2}{2(M + m)}, \quad A_2 = \frac{M^2C^2}{2(M + m)}.$$

Anwendungen.

In der technischen Praxis erscheint entweder die Arbeit A_1 oder jene A_2 als Nutzarbeit. Soll im ersten Falle, z. B. durch den Schlag eines Niethammers, die Deformation des Nietbolzens bewerkstelligt werden, so ergibt sich aus $A_1 = \frac{MmC^2}{2(M + m)}$, dass von der aufgewendeten Arbeit $\frac{MC^2}{2}$ ein um so größerer Theil A_1 nutzbar wird, je größer die gestoßene Masse m ist, weshalb man letztere, durch Andrücken eines zweiten Hammers an den Nietbolzen, vergrößert; der zweite Theil A_2 dieser Arbeit bewirkt nachtheilige Erschütterungen 2c. Aus demselben Grunde verbindet man einen Ambos, falls das darauf liegende Eisenstück z. B. durch einen Dampfhammer deformiert werden soll, mit einem schweren Gusseisen Körper (Chabotte) u. s. w.

Soll im zweiten Falle die Arbeit A_2, also die lebendige Kraft, welche beide Körper nach dem Stoße besitzen, nutzbar gemacht, d. i. bei Überwindung von Widerständen verwendet werden, wie dieses z. B. beim Eintreiben eines Keiles oder Nagels, beim Einrammen eines Pfahles 2c. der Fall ist, so ergibt sich aus $A_2 = \frac{M^2C^2}{2(M + m)}$, dass die Masse M des stoßenden Körpers verhältnismäßig groß sein muss, um von

der aufgewendeten Arbeit $\frac{M C^2}{2}$ einen großen Theil als Nutzarbeit zu erhalten, der Rest A_1 geht auf Deformation ꝛc. beider Körper verloren.

Ist die Masse m des ruhenden Körpers sehr groß gegenüber jener M, erfolgt z. B. der Stoß des Körpers A auf eine feste unbewegliche Wand, so ist $\frac{M}{m}$ nahezu gleich Null und

$$\omega = \frac{\frac{M}{m} C}{\frac{M}{m} + 1} \doteq 0, \; A_1 = \frac{M C^2}{2\left(\frac{M}{m} + 1\right)} \doteq \frac{M C^2}{2}, \; A_2 = (M + m) \frac{\omega^2}{2} \doteq 0,$$

d. h. es wird in diesem Falle nahezu die ganze lebendige Kraft des stoßenden Körpers auf Deformations-Arbeit verwendet.

Beispiele.

1) Zwei sich hinter einander bewegende Eisenbahnzüge stoßen gerade und central auf einander. Wenn nun der vordere Zug ein Gewicht von 200 Tonnen und eine Geschwindigkeit von 7 *m*, der hintere ein Gewicht von 260 Tonnen und eine Geschwindigkeit von 10 *m* besitzt, und der Stoſs als ein unelastischer zu betrachten ist, wie groß ist die auf Deformation ꝛc. verwendete Arbeit.

Es ist $M = \frac{260000}{g}, m = \frac{200000}{g}, C = 10\,m, c = 7\,m$, mithin

$$A_1 = \frac{M m}{2(M + m)} (C - c)^2 = \frac{52000}{0{\cdot}46} \cdot \frac{3^2}{2g} = 51855\,mkg.$$

2) Wenn bei einem Freifall-Dampfhammer der 2000 *kg* schwere Hammerklotz bei einer Fallhöhe $h = 1{\cdot}5\,m$ in das glühende Eisen 20 *mm* tief eindringt und dieses Eisen sammt Ambos und Chabotte ꝛc. 20000 *kg* wiegen, wie groß ist annähernd der mittlere Widerstand W des zu deformierenden Eisens.

Substituiert man statt der Massen M, m die Gewichte $G = M g$ und $G' = m g$, so ist die Deformations-Arbeit

$A_1 = \frac{M m C^2}{2(M + m)} = \left(\frac{G G'}{G + G'}\right)\frac{C^2}{2g}$, für $G = 2000$, $G' = 20000$ und $\frac{C^2}{2g} = h = 1{\cdot}5$ wird $A_1 = 2727\,mkg$.

Berücksichtigt man auch die Arbeit des Gewichtes G während des Weges $s = 0{\cdot}02\,m$, so ist

$$A_1 + G s = W s \text{ und daraus } W = \frac{A_1}{s} + G = 138350\,kg.$$

3. Wie groß ist bei einem Schlage des in Beispiel 2) angeführten Dampfhammers die nachtheilige auf Erschütterung der Fundamente ꝛc. verwendete Arbeit A_2 in Procenten der Hammer-Fallarbeit.

Mit Bezug auf die in Beispiel 2) substituierten Größen ist

$$A_2 = \frac{M^2 C^2}{2(M + m)} = \left(\frac{G^2}{G + G'}\right)\frac{C^2}{2g} = \frac{2000^2 . 1{\cdot}5}{22000} = 273\,mkg.$$

Fallarbeit $= G h = 3000\,mkg$. $A_2 = 9{\cdot}1\%$ von G h.

Aus diesem Beispiele ist einer der wichtigsten Gründe zu entnehmen, vermöge welcher in neuester Zeit in einzelnen Fällen statt großer Dampfhämmer andere Fabrications-Maschinen, z. B. hydraulische Schmiedepressen, verwendet werden.

4) Welche annähernd zu bestimmende Geschwindigkeit C dürfte höchstens ein cylinderisches Projectil von der Länge l und Durchmesser d im Momente des in seiner Axen-Richtung erfolgenden normalen Aufschlagens auf eine walzeiserne Platte von der Dicke $\delta = d$ haben, falls kein Durchscheeren dieser Platte erfolgen soll. Die Dichte des Geschosses sei $s = 7{\cdot}6$ und der Widerstand gegen das Durchscheeren $K = 40\,kg$ pro 1 mm^2.

Die ganze lebendige Kraft $\frac{M C^2}{2}$ des Projectils soll also nahezu blos auf die Deformation desselben verwandt werden; setzt man voraus, daſs dasselbe hierbei platt gedrückt wird,

so ist $\frac{1}{2}$ der Weg seines Schwerpunktes, während in letzterem der Widerstand W seitens der Platte wirksam zu denken, also die Widerstands-Arbeit durch $\frac{W l}{2}$ bestimmt ist.

Für $W = d \pi \delta . K$ muss also

$$\frac{G C^2}{2 g} < \frac{d \pi \delta K l}{2} \text{ oder } C^2 < \frac{d \pi \delta K l g}{G} \text{ sein,}$$

da $G = 1000 \frac{\pi d^2}{4} l s$, $\delta = d$ und $K = 40\,000\,000$ ist, so folgt

$$C^2 < 206526 \text{ oder } C < 455 \; m.$$

Gerader centraler, elastischer Stoß.

§ 49. Unter Beibehaltung der früheren Benennungen und Bezeichnungen gilt zunächst die für jeden geraden centralen Stoß (Fig. 82) begründete Relation

$$M (C - V) = m (v - c) \; \ldots \ldots (1.$$

Da beide Körper am Ende der Stoßzeit wieder ihre ursprüngliche Form annehmen, also infolge des Stoßes **kein Verlust an lebendiger Kraft** stattfindet, falls von der Arbeit zur Erzeugung von Wärme- und Schall-Schwingungen abgesehen wird, so muss die Summe der lebendigen Kräfte beider Körper **vor** dem Stoße gleich jener **nach** dem Stoße sein.

$$\frac{M C^2}{2} + \frac{m c^2}{2} = \frac{M V^2}{2} + \frac{m v^2}{2} \text{ oder } M (C^2 - V^2) = m (v^2 - c^2) \; \ldots \ldots (2.$$

Aus Gleichung 1) folgt für $C - V = x$, $v - c = \frac{M x}{m}$, und es ist

$$V = C - x, \; v = \frac{M x}{m} + c;$$

substituiert man diese Werte für V und v in Gleichung 2), so findet man nach entsprechender Reduction $m (2 C - x) = M x + 2 m c$, und daraus

$$x = C - V = \frac{2 m (C - c)}{M + m}, \; v - c = \frac{2 M (C - c)}{M + m} \; \ldots \ldots \ldots (3$$

wodurch der Geschwindigkeits-Verlust $C - V$ des Körpers A und der Geschwindigkeits-Gewinn $v - c$ des Körpers B bestimmt sind.

Sind beide Massen einander gleich, so ergibt sich für

$$M = m \text{ aus 3)} \ldots \ldots V = c \text{ und } v = C,$$

d. h. es werden infolge des Stoßes die **Geschwindigkeiten beider Körper vertauscht**.

Stößt der Körper A normal auf eine feste unbewegliche Wand mit der Geschwindigkeit C, ist also c gleich Null und die Masse m sehr groß gegenüber jener M, so ist $\frac{M}{m}$ nahezu gleich Null und mithin

$$C - V = 2 C : \frac{M}{m} + 1 = 2 C, \text{ also } V = - C \text{ und } v \text{ gleich Null;}$$

d. h. der Körper A springt in diesem Falle in der Richtung normal zur Wand mit einer Geschwindigkeit von letzterer zurück, welche gleich seiner Geschwindigkeit vor dem Stoße ist.

Gerader centraler, unvollkommen elastischer Stoß.

Da die beiden Körper A, B (Fig. 82) am Ende der Stoßzeit nicht wieder ihre ursprüngliche Form erlangen, also die auf Zusammendrückung derselben verlorene

Arbeit bei der darauf folgenden Ausdehnung nicht wieder vollständig ersetzt wird, so ergibt sich infolge dieses Stoßes ein Verlust an lebendiger Kraft, welcher voraussichtlich zwischen der Größe dieses Verlustes $\frac{Mm(C-c)^2}{2(M+m)}$, falls beide Körper unelastisch wären, und jener gleich Null, falls beide Körper elastisch wären, liegt. Setzt man daher die Differenz aus der Summe der lebendigen Kräfte beider Körper vor dem Stoße und dieser Summe nach dem Stoße gleich einer Größe $\frac{\alpha Mm(C-c)^2}{2(M+m)}$, wobei α ein noch zu bestimmender von der Beschaffenheit beider Körper abhängender Coefficient, jedenfalls kleiner als eins, ist, so folgt

$$\left(\frac{MC^2}{2}+\frac{mc^2}{2}\right)-\left(\frac{MV^2}{2}+\frac{mv^2}{2}\right)=\frac{\alpha Mm(C-c)^2}{2(M+m} \text{ oder}$$

$$M(C^2-V^2)-m(v^2-c^2)=\frac{\alpha Mm(C-c)^2}{(M+m)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1.$$

Für $C-V=x$ also $V=C-x$, ergibt sich aus der Grund-Gleichung für jeden geraden centralen Stoß, $M(C-V)=m(v-c)$, $v=\frac{Mx}{m}+c$.

Durch Substitution dieser beiden Werte für V und v in die Gleichung 1) findet man nach entsprechender Reduction

$$x^2-\frac{2m(C-c)}{M+m}x=-\frac{\alpha m^2(C-c)^2}{(M+m)^2}, \text{ und daraus}$$

$$x=\frac{m(C-c)}{M+m}(1+\sqrt{1-\alpha}), \text{ der Geschwindigkeits-Verlust ist } C-V=x,$$

$$\text{der Geschwindigkeits-Gewinn ist } v-c=\frac{Mx}{m},$$

$$\text{die Arbeit zur Deformation etc. beider Körper ist}=\frac{\alpha Mm(C-c)^2}{2(M+m)}.$$

Für α gleich Null, entsprechen diese Resultate dem elastischen Stoße.

Stößt der von einer gewissen Höhe frei fallende Körper A, dessen Masse M ist, mit der Geschwindigkeit C auf die horizontale Fläche eines unbeweglichen Körpers B von verhältnismäßig großer Masse m, so ist, für $c=$ Null und $\frac{M}{m}\doteq$ Null, $v=$ Null, ferner $x=\frac{C(1+\sqrt{1-\alpha})}{\frac{M}{m}+1}=C(1+\sqrt{1-\alpha})=C-V$, woraus $V=-C\sqrt{1-\alpha}$ bestimmt wird. Der Körper A springt also entgegengesetzt der Freifall-Richtung vom Körper B wieder zurück u. zw. mit einer kleineren Geschwindigkeit, als er zu Beginn des Stoßes hatte.

Beobachtet man seine Fallhöhe $h=\frac{C^2}{2g}$ vor dem Stoße und seine Steighöhe $h'=\frac{V^2}{2g}=\frac{C^2}{2g}(1-\alpha)$ nach dem Stoße, so ist die Größe $\frac{h'}{h}=1-\alpha$ und damit auch der Coefficient α bekannt.

In dieser Art wurde gefunden rücksichtlich des Stoßes zweier Körper

aus Stahl, $1 - \alpha = 0 \cdot 309$ und $\alpha = 0 \cdot 691$,

aus Gusseisen, $1 - \alpha \doteq 1$ und $\alpha \doteq$ Null, u. s. w.

wobei der stoßende Körper die Kugelform und der gestoßene die Plattenform hatte.

Auf der erörterten Eigenschaft, dass bei dem unvollkommen elastischen Stoße eines Körpers auf einen unbeweglichen zweiten, der erste Körper wieder zurückspringt, beruht die Anwendung von Prell-Vorrichtungen bei Hammerwerken, von Holz-Unterlagen bei Schmiede-Ambosen u. s. w.

Stoß drehbarer Körper.

§ 50. Besitzen die beiden um die parallelen Axen o, o′ (Fig. 83) drehbaren Körper A und B beziehungsweise die Trägheitsmomente T, T′ und stößt der Körper A auf jenen B, wobei N die Normale zur gemeinschaftlichen Berührungsebene E im Punkte i ist, so erscheint die vom Körper A ausgehende in dieser Normale wirksame Kraft k als Ursache einer Änderung der vor dem Stoße stattfindenden Winkel-Geschwindigkeit des Körper B, und die von letzterem ausgehende und auf den Körper A wirkende Gegenkraft $k' = k$ als Ursache einer Änderung der vor dem Stoße stattfindenden Winkel-Geschwindigkeit des Körpers A. Ist $m = \frac{T'}{l^2}$ die auf den Abstand $o' i = l$ reducierte Masse des Körpers B und $M = \frac{T}{r^2}$ die auf den Abstand $o i = r$ reducierte Masse des Körpers A, so sind (nach § 42) die genannten Winkelgeschwindigkeits-Änderungen bestimmt durch die Geschwindigkeits-Änderungen, welche zwei bei i in der Linie N liegende materielle Punkte von den Massen m und M erlangen, auf welche die Kräfte k und k′ wirken (Fig. 83a), falls deren in die Richtung N fallende Geschwindigkeiten vor dem Stoße beziehungsweise übereinstimmen mit den Umfangs-Geschwindigkeiten, welche, in den Abständen l und r von den Drehaxen, die genannten Körper im Berührungs-Zeitmomente besitzen. In dieser Art kann also der Stoß drehbarer Körper auf den geraden centralen Stoße zweier Kleinkörper von den Massen M und m zurückgeführt werden.

Besonderer Fall.

Kann der Stoß als ein unelastischer betrachtet werden und ruht der Körper B vor dem Stoße, wie z. B. bei dem Angriffe eines Well-Daumens auf einen Hammer (Fig. 83), wobei $M = \frac{T}{r^2}$ die reducierte Masse der Welle sammt aufgekeilten Rädern 2c., $m = \frac{T'}{l^2}$ die reducierte Masse des Hammers und C die Geschwindigkeit der Welle im Kreise vom Radius r vor dem Stoße ist, so ergibt sich die gemeinschaftliche in der Richtung N liegende Geschwindigkeit ω beider Körper nach dem Stoße, wie oben erörtert, aus

$$\omega = \frac{MC}{M+m}, \text{ der Geschwindigkeits-Verlust der Welle ist } C - \omega = \frac{Cm}{M+m}$$

Wird verlangt, dass dieser während des Stoßes stattfindende Verlust eine gewisse Größe nicht überschreite, also z. B. nur $\frac{1}{20}, \frac{1}{30} \ldots$ des Geschwindigkeitsmittels $C_0 = \frac{C+\omega}{2}$ betrage, so ist $C - \omega = \frac{C_0}{i}$, (Gleichförmigkeitsgrad $i = 20, 30 \ldots$ §. 41).

Aus $C + \omega = 2\,C_0$ und $C - \omega = \frac{C_0}{i}$ folgt, $C = C_0 + \frac{C_0}{2i}$, durch Substitution dieses Wertes für C in die Gleichung für $C - \omega$ ergibt sich

$$C - \omega = \frac{C_0}{i} = \frac{C_0\,(2\,i + 1)\,m}{2\,i\,(M + m)} \text{ oder } 2\,(M + m) = (2\,i + 1)\,m,$$

woraus gefunden wird die obiger Bedingung entsprechende reducierte Masse M der Daumenwelle inclusive eines etwa auf letzterer aufgekeilten Schwungrades 2c.

$$M = m\left(i - \frac{1}{2}\right) \text{ oder hinlänglich genau } M = m\,i.$$

Mit diesem Werte von M bestimmt man den Verlust an lebendiger Kraft infolge des Stoßes (nach §. 48) aus

$$A_1 = \frac{M\,m\,C^2}{2(M + m)} = \frac{m^2\,i\,C^2}{2\,m(i + 1)} \text{ oder, da } C^2 = C_0^2\left(1 + \frac{1}{2i}\right)^2 \text{ und } \frac{1}{4i^2} \text{ fast Null ist,}$$

$$A_1 = \frac{m\,C_0^2}{2}.$$

Da unter der gestellten Bedingung die Welle nahezu gleichförmig rotiert, so ist, falls sie minutlich n Touren macht, $C_0 = \frac{2\,r\,\pi\,n}{60}$.

Bei einem Stampfwerke stoßen die entsprechend vertheilten Daumen der Welle auf die Hebköpfe der Stämpfer, wobei gleichzeitig eine bestimmte Anzahl der letzteren, u. zw. in der Regel jedesmal dasselbe Stämpfergewicht, zu heben ist; wird das Gesammtgewicht der gleichzeitig in Angriff stehenden Stämpfer mit Q bezeichnet, so ist die Masse m unmittelbar bestimmt durch $m = \frac{Q}{g}$, die reducierte Masse der Welle 2c. ist $M = \frac{T}{r^2} = \frac{Qi}{g}$ (annähernd), der Verlust an lebendiger Kraft durch den Stoß ist $A_1 = \frac{Q\,C_0^2}{2g}$.

Beispiele.

1) Wenn bei einem Stampfwerke das Gewicht der bei einem Daumen-Angriffe gleichzeitig zu hebenden Stämpfer 500 *kg* beträgt und von der Daumenwelle, z. B. als Secundärwelle, gewünscht wird, dass sie, trotz der Daumenstöße, nahezu gleichförmig rotiere, welches Gewicht müsste ein zur Erfüllung dieser Bedingung auf der Welle aufgekeiltes Schwungrad haben, falls der Gleichförmigkeitsgrad $i = 20$, der Angriffsradius $r = 300$ *mm* und der Schwungring-Radius $R = 900$ *mm* gegeben sind; wie groß ist hierbei der Verlust an Betriebsarbeit bei einem Angriffe infolge des Stoßes bei minutlich 20 Touren der Welle.

Macht man den Schwungring allein so schwer, dass er der gestellten Bedingung entspricht, so ist dessen Gewicht G zu bestimmen aus

$$\frac{T}{r^2} = \frac{G\,R^2}{g\,r^2} = \frac{Q\,i}{g}, \text{ es ist } G = \frac{Q\,i\,r^2}{R^2} = 500.20.\frac{1}{9} = 1111\ kg.$$

Der genannte Arbeitsverlust ist $\frac{Q\,C_0^2}{2\,g} = \frac{Q.4\,r^2\,\pi^2\,n^2}{60^2.2g} = 10\ mkg.$

2) Wie groß ist die Arbeit zum Heben des im früheren Beispiele angegebenen Stämpfer-Gewichtes Q auf eine Höhe $h = 250$ *mm*, falls sowohl auf die nach obigen Daten zu bestimmende Hub-Geschwindigkeit wie auch auf den bereits gerechneten Arbeits-Verlust Rücksicht genommen wird. (Vergl. §. 37, Beispiel 3.)

Mittelpunkt des Stoßes.

Ist der Stoß zwischen dem Körper A und dem um die Axe o o drehbaren Körper B im Punkte i ein gerader (Fig. 87), wobei dieser Punkt in einer Linie o X liegt, die den Abstand r des Schwerpunktes s von der Axe o o enthält, so fällt die Richtung der vom Körper A ausgehenden auf den Körper B wirkenden Stoßkraft k in die Tangente an den Drehbogen bei i vom Radius l. Diese Kraft ist die Ursache der in irgend einem Augenblicke der kleinen Stoßzeit stattfindenden Geschwindigkeits-

Änderung, d. i. der Winkel-Beschleunigung (Verzögerung) ε des Körpers B; sie kann ersetzt werden durch ein Kräftepaar vom Drehmomente $k\,l = \varepsilon T$ (T Trägheitsmoment des Körpers B, § 39) und eine ihr an Richtung und Größe gleiche an der Axe o o angreifende Einzelnkraft (k).

Besitzen im genannten Augenblicke die Punkte des Körpers B von den Massen m_1 m_2 . . . . . die Axial-Abstände ϱ_1 ϱ_2 . . . . ., die Umfangs-Beschleunigungen p_1 p_2 . . . . . . entsprechend den Tangential-(Trägheits-)Reactionen von den Größen $m_1 p_1$, $m_2 p_2$, ... so kann jede der letzteren Widerstandskräfte mittelst eines Kräftepaares parallel zu sich an die Axe o o verschoben werden; die Summe der Kräftepaar-Momente gibt das resultierende, dem Momente $k\,l$ gleiche Widerstandsmoment und jede der an der Axe o o angreifenden Einzelnkräfte $(m_1 p_1)$, $(m_2 p_2)$ . . . . . kann in zwei zu einander senkrechte Richtungen zerlegt werden, diese Richtungen entsprechen den Axen o X, o Y eines rechtwinkligen Coordinatensystems o o X Y.

Hat der Punkt, dessen Masse m_1 ist, die Coordinaten x_1 y_1 und ist $\sphericalangle\,(\varrho_1\, y_1) = \alpha$ (Fig. 87), so ergeben sich durch die genannte Zerlegung der Kraft $(m_1 p_1)$ die beiden Componenten

$$(m_1 p_1) \cos \alpha = m_1 p_1 \frac{y_1}{\varrho_1} = m_1 (\varrho_1 \varepsilon) \frac{y_1}{\varrho_1} = m_1 y_1 \varepsilon,$$

$$(m_1 p_1) \sin \alpha = m_1 p_1 \frac{x_1}{\varrho_1} = m_1 (\varrho_1 \varepsilon) \frac{x_1}{\varrho_1} = m_1 x_1 \varepsilon.$$

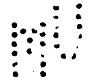
Denkt man in gleicher Art die Kräfte $(m_2 p_2)$, $(m_3 p_3)$ . . . . . . zerlegt, so resultiert in der X-Richtung eine Kraft $P = \varepsilon (m_1 y_1 + m_2 y_2 + \ldots .)$,
in der Y-Richtung eine Kraft $Q = \varepsilon (m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots .)$.

Ist M die ganze Masse des Körpers, so ist nach dem Schwerpunkts-Momenten-Lehrsatze bezüglich der Ebene o o X, $\Sigma (m\,y) = M.\,0 = 0$, nach demselben Lehrsatze ist bezüglich der Ebene o o Y, $\Sigma (m\,x) = M\,r$; also ist P gleich Null und ist durch $Q = M\,r\,\varepsilon$ die Wirkung der genannten Kräfte auf die Drehaxe bestimmt. Soll nun infolge des Stoßes auf die Drehaxe keine Zug- oder Druckkraft wirksam werden, so müssen die beiden entgegengesetzt gerichteten Kräfte (k) und Q, in derselben Kraftlinie wirksam, einander gleich sein.

Aus $k = Q$ oder $\frac{\varepsilon T}{l} = M\,r\,\varepsilon$ folgt $l = \frac{T}{M\,r}$.

Der dieser Länge l entsprechende Punkt i wird der Mittelpunkt des Stoßes genannt, er ist identisch mit dem (in § 43) bestimmten Schwingungspunkte des Körpers B rücksichtlich der Drehaxe o o. Hat man also entweder durch Rechnung oder experimentell die Länge l des mathematischen Pendels bestimmt, welches mit dem Körper B bezüglich der Axe o o einerlei Zeit zu einer Schwingung besitzt, und kennt man die Lage des Schwerpunktes s, so ist auch der Punkt i bekannt.

Soll die den Hammerstiel haltende Hand beim Hammerschlage keine Prellung erleiden, so muss die Linie N der Schlagstoss-Kraft k (möglichst) durch den Mittelpunkt des Stoßes gehen. Letzteres soll überhaupt bei Hammerwerken der Fall sein, um nachtheilige Erschütterungen in der Axe oder Hammerhülse thunlichst hintan zu halten. Im Allgemeinen ist es also zweckmäßig, drehbare auf Stoss beanspruchte Maschinentheile so zu construieren, dass der Stoss-Mittelpunkt in der Stoss-Kraftlinie liegt.



Beispiel.

Schwingt eine Stange um eine an ihrem Ende normal zur Länge L befindliche Axe, so ist deren Trägheitsmoment $T = \frac{M L^2}{3}$ (§. 40), mithin hat der gesuchte Stoss-Mittelpunkt von dieser Axe den Abstand $l = \frac{M L^2}{3} : M r$, für $r = \frac{L}{2}$ ist $l = \frac{2}{3} L$.

Schiefer Stoß.

Sind die unmittelbar vor dem Stoße stattfindenden Geschwindigkeiten C und c der Körper A, B unter den Winkeln α, β (Fig. 84) geneigt gegen die beide Schwerpunkte o, o' enthaltende Normale N, so kann man jede derselben in zwei Componenten $C \cos \alpha$, $C \sin \alpha$ und $c \cos \beta$, $c \sin \beta$ in der Richtung und senkrecht zur Geraden N zerlegen, und können nun, rücksichtlich der beiden in der Normale N liegenden Geschwindigkeiten $C \cos \alpha$ und $c \cos \beta$ als Stoß-Anfangsgeschwindigkeiten, die beim geraden centralen Stoße erörterten Gesetze in Anwendung gebracht werden, indem man in die früheren Formeln statt C und c beziehungsweise substituiert $C \cos \alpha$ und $c \cos \beta$. In dieser Art bestimmt man auch die in die Richtung N fallenden Stoß-Endgeschwindigkeiten V und v; werden diese mit den restierenden Geschwindigkeits-Componenten $C \sin \alpha$, $c \sin \beta$ entsprechend zusammengesetzt, also V mit $C \sin \alpha$ und v mit $c \sin \beta$, so ergeben sich die beiden Geschwindigkeiten x, y, welche die Körper A, B wirklich nach dem Stoße besitzen, vorausgesetzt, dass die während des Stoßes zwischen den Körpern auftretende Reibung unberücksichtigt bleiben kann.

Besonderer Fall.

Stößt eine Kugel unter dem Winkel $90 - \alpha$ ihrer Schwerpunkts-Richtung gegen eine feste Wand mit der Geschwindigkeit C (Fig. 84) und kann der Stoss als ein elastischer betrachtet werden, so ist in die frühere Formel für den Geschwindigkeits-Verlust $C - V = \frac{2 m (C - c)}{M + m}$ zu substituieren $c = 0$, $\frac{M}{m} = 0$, und statt C die Componente $C \cos \alpha$, man erhält

$$V = C \cos \alpha - \frac{2 C \cos \alpha}{\frac{M}{m} + 1} = - C \cos \alpha;$$

Durch Zusammensetzung dieser Geschwindigkeit $- C \cos \alpha$ mit der zweiten Geschwindigkeits-Componente $C \sin \alpha$ ergibt sich eine Geschwindigkeit C', welche bezüglich ihrer Größe und der Größe ihrer Neigung gegen die Normale N mit der Geschwindigkeit C übereinstimmt, (Einfallswinkel gleich Reflexionswinkel).

Mechanische Arbeit der Elasticitäts-Widerstände.

§ 52. Aus der „Statik elastischer Körper" ist bekannt, dass wenn ein Körper durch äußere Kräfte rücksichtlich eines der dort erörterten Elasticitätsfälle beansprucht wird, also auf Zug oder Druck 2c., derselbe eine nur so lange zunehmende Formänderung erleidet, bis die gleichzeitig hervorgerufenen Elasticitäts-Widerstände eine hinreichende Größe haben, um diesen äußeren Kräften das Gleichgewicht zu halten.

Zug oder Druck.

Die Kraft P (Fig. 85), welche mit dem Zug-Elasticitäts-Widerstande einer Stange von der Länge l und dem Querschnitte f bei einer gewissen Verlängerung

λ dieser Stange im Gleichgewichte ist, hat die Größe $P = fS$, (S spec. Zugspannung pro 1 mm^2), wobei $\lambda = \frac{Pl}{Ef}$ ist, (E Elasticitätsmodul).*) Aus letzterer Formel folgt, daſs unter übrigens gleichen Umständen die Verlängerung λ proportional dieser Kraft und mithin proportional dem von Null aus bis zur Größe $P = fS$ wachsenden Elasticitäts-Widerstande ist, die Arbeit des letzteren ist daher durch die Fläche des Dreieckes a b c (Fig. 85) bestimmt und mithin gleich $\frac{P\lambda}{2}$. Mit Berücksichtigung der Formeln für P und λ ergibt sich

$$\frac{P\lambda}{2} = fl\left(\frac{S^2}{2E}\right),$$

diese Arbeitsgröße ist also dem Stangen-Volumen proportional.

Wird eine mechanische Arbeit A, eventuell die lebendige Kraft eines zweiten Körpers, zur Leistung der genannten Verlängerungs-Arbeit aufgewendet, so muſs

$$A = fl\left(\frac{S^2}{2E}\right)$$

sein und man erkennt, daſs, wenn rücksichtlich einer gewissen Arbeitsgröße A das Volumen f l der Stange oder eines auf Zug beanspruchten stangenförmigen Körpertheiles (Fig. 86) zu klein ist, möglicherweise die Zug-Spannung $S = \sqrt{\frac{2AE}{fl}}$ eine noch zuläſsige Grenze überschreiten könnte, z. B. für Schmiedeisen $S = 6$ *kg*, für Guſseisen $S = 3$ *kg* ꝛc. Dieser Fall tritt ein, falls ein in dieser Art auf Zug beanspruchter Körper an irgend einer Stelle, z. B. durch Eindrehung einer Nuth, verschwächt wurde; wird dagegen der ganze Körper von der Länge L auf einen constanten Querschnitt f abgedreht, so kann eine weit größere Arbeit A in genannter Weise aufgewendet werden, ohne daſs dabei möglicherweise die zuläſsige Spannung $S = 6$ *kg*, $S = 3$ *kg* ꝛc. überschritten wird.

Die vorstehend begründeten Gesetze gelten auch bezüglich der Druck-Elasticität.

Beispiel.

Am Ende eines 10 *m* langen Seiles hängt ein 50 *kg* schwerer Kübel; wenn nun in diesen ein Körper im Gewichte von 60 *kg* aus einer Höhe $h = 3$ *m* frei fallen gelassen wird, wie verhält sich der in diesem Falle nöthige Seilquerschnitt f zu jenem f,' welcher erforderlich wäre, falls das Seil diese 60 *kg* sammt dem Kübel als ruhige Belastung zu tragen hätte und in beiden Fällen die zuläſsige Hanfseil-Zugbeanspruchung $S = \frac{1}{2}$ *kg* in Rechnung gezogen wird. $(E = 50)$.

Wenn der Körper von der Masse $M = \frac{60}{g}$ mit einer Geschwindigkeit $C = \sqrt{2gh}$ in den ruhenden Kübel von der Masse $m = \frac{50}{g}$ fällt, so besitzen, falls der dabei entstehende Stoſs als ein unelastischer betrachtet werden kann, beide Massen nach dem Stoße die Geschwindigkeit $\omega = \frac{MC}{M+m}$ und die lebendige Kraft $(M+m)\frac{\omega^2}{2}$, welche nahezu vollständig zur Seil-Verlängerungs-Arbeit verwendet wird, es ist also, falls die Masse des Seiles unberücksichtigt bleibt,

$$(M+m)\frac{\omega^2}{2} = fl\frac{S^2}{2E} \quad \text{oder} \quad \frac{M^2\,2gh}{M+m} = fl\frac{S^2}{E},$$ woraus bestimmt wird

*) Erster Theil, § 3.

$$f = \frac{2.60^2 . h . E}{110 \, l \, S^2} = 3927 \, mm^2.$$

Für die angegebene ruhige Belastung ist

$$f' = \frac{60 + 50}{S} = 220 \, mm^2.$$

Das Seil müsste also im ersten Falle mehr als viermal so dick sein, wie im zweiten Falle.

Anmerkung.

Sind die Zug- oder Druckstangen bei Eisen- oder Holzconstructionen für eine ruhige Belastung dimensioniert, so können bei einer Fallstoß-Beanspruchung für dieselbe Last möglicherweise schon wenige Centimeter Fallhöhe zur Überschreitung der noch zulässigen Zug- oder Druck-Spannung hinreichen. So z. B. kann schon aus diesem Grunde die Entgleisung schwer beladener Eisenbahnwaggons auf einer derartig construierten Brücke die schlimmsten Folgen herbei führen.

Biegung.

§ 53. Der einfachste Biegungsfall (Fig. 88), auf welchen sich bekanntlich alle übrigen zurückführen lassen, ist jener, bei welchem ein einerseits eingespannter prismatischer Träger von dem Querschnitts-Trägheitsmomente W (bezüglich der Axe $\alpha\alpha$) und der freien Länge l durch ein Kraftmoment $P l = \frac{S W}{e}$, entsprechend einer Senkung des Trägerendes $s = \frac{P l^3}{3 E W}$, beansprucht ist, (S zulässige Beanspruchung per 1 mm^2, E Elasticitätsmodul).*) Für den Gleichgewichtszustand hat das Moment des der Kraft P entgegengesetzt gleichen resultierenden Elasticitäts-Widerstandes die Größe $\frac{S W}{e}$ und ist, wie aus der zweiten Formel hervorgeht, dieser von Null aus bis zur Größe P wachsende Widerstand der Senkung s proportional, mithin ist auch in diesem Falle dessen Arbeit durch die Fläche eines Dreieckes a b c (Fig. 88) bestimmt und von der Größe $\frac{P s}{2}$. Mit Berücksichtigung der Formeln für P und s ergibt sich die genannte Arbeit $\frac{P s}{2} = \frac{1}{6}\left(\frac{W l}{e^2}\right)\frac{S^2}{E}$, so z. B. ist für einen Rechteck-Querschnitt von der Höhe h und Breite b, $W = \frac{b h^3}{12}$, $e = \frac{h}{2}$, und $\frac{P s}{2} = \frac{1}{18}(b h l)\frac{S^2}{E}$.

Auf dieselbe Weise findet man, dass auch für andere Querschnitte und andere Biegungsfälle die Größe dieser Arbeit dem Träger-Volumen proportional ist.

Wird also eine mechanische Arbeit A, eventuell die lebendige Kraft eines zweiten Körpers, zur Leistung dieser Arbeit rücksichtlich dieses Biegungsfalles (Fig. 88) aufgewendet, so muss $A = \frac{1}{18}(b h l)\frac{S^2}{E}$ sein und man erkennt wieder, dass, falls bei gegebener Arbeitsgröße A das Träger-Volumen b h l zu klein ist, möglicherweise die specifische Spannung S eine noch zulässige Größe überschreiten kann; dasselbe gilt auch bezüglich anderer Biegungsfälle.

Beispiel.

Aus welcher Höhe x kann noch ein Gewicht von 60 *kg* auf das eine Ende eines am anderen Ende horizontal eingespannten Stahlstabes von 800 *mm* Länge frei auffallen, falls dessen Rechteck-Querschnitt die Dimensionen b = 20 *mm*, h = 50 *mm* besitzt und die spec. Spannung S = 30 *kg* pro 1 mm^2 nicht überschritten werden soll. (E 20000).

*) Erster Theil, § 5.

Da hier die Masse des stoßenden Körpers ungefähr zehnmal so groß als die Stabmasse ist, so kann letztere unberücksichtigt bleiben und es ist

$$A = 60\,x = \frac{b\,h\,l\,S^2}{18\,E}, \text{ woraus bestimmt wird}$$

$$x = \frac{b\,h\,l\,S^2}{1080\,E} = 33\,mm.$$

Für eine ruhige Belastung durch das genannte Gewicht von 60 *kg* würde sich unter übrigens gleichen Umständen ergeben aus $P\,l = \frac{S\,b\,h^2}{6}$

$$S = \frac{6\,P\,l}{b\,h^2} = 5{\cdot}8\,kg,$$

also S ungefähr 5—mal so klein, wie bei der Biegung infolge des frei fallenden Gewichtes.

Torsion.

Das Kraftmoment $P\,a$ (Fig. 89), welches mit dem Elasticitäts-Widerstandsmomente eines auf Torsion beanspruchten stabförmigen Körpers bei einem bestimmten Torsionswinkel α im Gleichgewichte steht, hat die Größe $P\,a = \frac{W'S}{e}$ und es ist der einer Länge l des tortierten Stabes entsprechende Torsionswinkel $\alpha = \frac{l\,P\,a}{G\,W'}$ (W' Querschnitts-Trägheitsmoment bezüglich der neutralen Axe o, S spec. Spannung pro 1 mm^2, G Schub-Elasticitätsmodul).*) Aus letzterer Formel folgt, dass unter übrigens gleichen Umständen der Bogen α proportional der Kraft P und mithin proportional dem von Null aus bis zur Größe $\frac{W'S}{e\,a}$ wachsenden Elasticitäts-Widerstande ist; die Arbeit des letzteren ist daher, rücksichtlich des Kraftangriffsweges $a\,\alpha$, wie früher durch die Fläche eines Dreieckes bestimmt und mithin gleich $\frac{P\,a\,\alpha}{2}$. Mit Berücksichtigung der Formeln für $P\,a$ und α ergibt sich

$$\frac{P\,a\,\alpha}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{W'\,l}{e^2}\right)\frac{S^2}{G}.$$

Für einen Kreis-Querschnitt ist $W' = \frac{\pi d^4}{32}$ und $e = \frac{d}{2}$ mithin

$$\frac{P\,a\,\alpha}{2} = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi d^2 l}{4}\right)\frac{S^2}{G} = A.$$

Diese Arbeitsgröße ist also ebenfalls dem Volumen $\frac{\pi d^2 l}{4}$ des tortierten Stabes proportional und gleich der mechanischen Arbeit A, eventuell gleich der lebendigen Kraft eines zweiten Körpers, welche aufgewendet wird, um diese Torsionsarbeit zu leisten. Diese Art der Torsionsbeanspruchung kann eintreten, wenn z. B. auf einer Welle ein Schwungrad aufgekeilt ist und dieses, infolge eines im Abstande l von diesem Rade an der Welle plötzlich auftretenden sehr großen Widerstandes, momentan zur Ruhe kommt. Die lebendige Kraft des Rades leistet diese Arbeit, wobei möglicherweise eine noch zulässige Größe der spec. Spannung S überschritten würde, falls das Volumen $\frac{\pi d^2 l}{4}$ des tortierten Wellenstückes zu klein wäre.

*) Erster Theil, § 15.

